

Ortalama Kuramı ve Merkezi Katmanlı Uzay Kuramı ile Galerkin Modellerinin Çözümlemesi ve Doğrusal Olmayan Kontrolü

Coşku Kasnakoğlu¹, Andrea Serrani¹

¹Elektrik ve Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
Ohio State University, Columbus, Ohio, A.B.D.

Özetçe

Bu makalede, dinamik denklemleri duruma göre karesel biçimde olan, durum ile girişe göre de çift doğrusal biçimde olan ve sıfır giriş koşulunda Hopf çatallanması gösteren doğrusal olmayan kontrol sistemleri incelenmiştir. Bu model için tasarlanan bir doğrusal kontrol, kipsel biçimler ve merkezi katmanlı uzay kuramı kullanılarak çözümlenmiştir. Çözümleme sonucunda salınım genliğinin, hem kontroldeki doğrusal terimlere, hem de merkezi katmanlı uzay ile ilgili olan terimlere bağlı olduğu tespit edilmiştir. İkincisinden faydalanmak amacıyla doğrusal olmayan bir kontrol yasası tasarlanmıştır. Zamanla değişen periyodik bir koordinat değişimi, zaman ölçeklemesi ve ortalama yöntemleri kullanılarak kapalı döngü sistemi basitleştirilmiştir. Merkezi katmanlı uzay kuramı kullanılarak, limit çevrimlerinin sayısını ve kararlılık tiplerini belirleyen koşullar ile, salınım genliği için analitik ifadeler çıkarılmıştır.

1. GİRİŞ

Dinamiği duruma göre karesel ve durum ile girişe göre çift doğrusal olan sistemler pek çok alan ve uygulamada kendini göstermektedir. Bu tip bir sistem modeli olan Galerkin modeli özellikle kovuk akım kontrolü uygulamalarında sıkça kullanılmaktadır. Örneğin, makaslama katmanları için düşük boyutlu ampirik Galerkin modelleri geliştirilmiş [8]; silindir etrafı akımları için bu modellerin sıradüzenleri incelenmiş [10]; bu modellerin dayanıklılığı ve dinamik erimleri üzerinde çalışılmış [9]; ve bu modeller kullanılarak sistem kararlılık çözümlemesi, kontrol tasarımı ve dinamik kestirimler yapılmıştır [12, 18]. Galerkin modelleri, bazı kısmi türevsel denklem sistemleri için kontrol tasarımı da kullanılmıştır [4, 1]. Ast dikgen ayrışım (POD) ve Galerkin izdüşümü kullanılarak sıkıştırılabilir akışkanlar için karesel Galerkin modelleri geliştirilmiş [14]; ve Galerkin izdüşümü kullanılarak elde edilen adi türevsel denklemleri kapatan geri çatılma denklemleri türetilerek, POD tekniğini sürekli simetrik sistemlere uygulamak için bir yöntem geliştirilmiştir [16].

Burada sunulan iş temel olarak, Galerkin modeli ile temsil edilen bir sistemin, doğrusal olmayan sistem kuramının önemli bir aracı olan merkezi katmanlı uzay kuramı [19] kullanılarak basitleştirilmesi, çözümlenmesi ve kontrolü ile ilgilidir. Merkezi katmanlı uzay kuramının kullanıldığı çok sayıda uygulamalardan bazı örnekler vermek gerekirse: sanal eksen üzerinde denetlenemeyen modlar içeren bir doğrusallaştırmaya sahip kontrol sistemlerinin yerel kararlılaştırılması [2];

zamanda ayrık doğrusal olmayan sistemlerin, pürüzsüz durum geribeslemesi ile kararlılaştırılabilirliği için gerekli ve yeterli koşullar türetilmesi [7]; karma evreli doğrusal olmayan bir takım sistemlerin durum geribeslemesi ile yerel kararlılaştırılması [3].

Bu makaledeki amaç, akım kontrolü problemlerinde sıkça karşılaşılan sistem tipini temsil eden bir Galerkin modelinden başlayarak, ortalama kuramı ve merkezi katmanlı uzay kuramı uygulamak sureti ile bu modeli çözümlenmek, basitleştirmek ve kontrol etmektir. Makale şu şekilde düzenlenmiştir: Bölüm 2 problemin tanımını verdikten sonra, Bölüm 3 probleme klasik doğrusal kontrol yaklaşımını, akabinde Bölüm 4 de model indirgemesi ve doğrusal olmayan kontrol tasarımı ile çözümlemesini içermektedir. Bölüm 5 sonuçların bir kovuk akım kontrol problemine uygulanmasını, Bölüm 6 benzetim sonuçlarını ve nihayet Bölüm 7 genel değerlendirmeleri ve gelecekte planlanan çalışmalarını sunmaktadır.

2. PROBLEMİN TANIMI

Aşağıdaki N boyutlu doğrusal olmayan kontrol sistemini ele alalım

$$\dot{a}_i = \sum_{j=1}^N l_{ij} a_j + \sum_{j,k=1}^N q_{ijk} a_j a_k + \left(r_i + \sum_{j=0}^N s_{ij} a_j \right) u \quad (1)$$

Burada $i = 1 \dots N$. Sistem (1) aşağıdaki gibi de ifade edilebilir

$$\dot{a} = La + Q(a) + (R + Sa)u$$

Burada $a = \{a_i\}_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}$, $L = \{l_{ij}\}_{i,j=1}^N \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $Q(a) = \{a^T Q_i a\}_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$, $Q_i = \{q_{ijk}\}_{j,k=1}^N \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $R = \{r_i\}_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ ve $S = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^N \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Varsayım 1. Sistem (1)'in, $u = 0$ olduğu vakit, bir Hopf çatallanması gösterdiği ve L 'nin özdeğer spektrumunun aşağıdaki biçimde olduğu varsayılacaktır: $\text{spec}(L) = \{\sigma + j\omega, \sigma - j\omega, -\lambda_1, \dots, -\lambda_N\}$. Burada $\sigma > 0$, $\omega > 0$, $\lambda_i > 0$ ve $i \neq j$ için $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Sistem (1), terslenebilir bir koordinat dönüşümü vasıtasıyla kipsel koordinatlarda ifade edilebilir

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= F_1 \eta + \varphi_1(\eta, \zeta) + (G_1 + \gamma_1(\eta, \zeta))u \\ \dot{\zeta} &= F_2 \eta + \varphi_2(\eta, \zeta) + (G_2 + \gamma_2(\eta, \zeta))u \end{aligned} \quad (2)$$

Burada

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_{N-2} \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix}$$

ve $F_2 = \text{diag}(-\lambda_1, \dots, -\lambda_N)$. Ayrıca $G_1 \in \mathbb{R}^2$, $G_2 \in \mathbb{R}^{N-2}$, ve $\varphi_1, \gamma_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{N-2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ve $\varphi_2, \gamma_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{N-2} \rightarrow \mathbb{R}^{N-2}$ koordinat merkezinde sıfır değeri alan sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır.

Model (2), akım kontrol problemlerinde indirgenmiş modeller kullanılarak elde edilen bir sistem sınıfını temsil eder. Benzeri modeller örneğin silindirik dalga problemleri [10, 8], kovuk akım kontrolü ve kestirimi [15], burgaç atma için en iyi geribesleme kontrolü [17], ve sentetik jet akımlarını tanımlamak [13] için kullanılmıştır. Burada kontrolün temel amacı Hopf çatallanmasından doğan salınım genliğini azaltmak veya mümkünse salınımı tamamiyle yok etmektir.

3. KONTROLÜN DOĞRUSAL KISMININ ÇÖZÜMLEMESİ

Çözümlemeyi basitleştirmek için genellik kaybı olmadan $N = 4$ kabul edilebilir; daha fazla sayıda kararlı mod bulunması durumunda çözümlemenin nasıl genişletilebileceğini görmek zor değildir. Aşağıdaki gibi bir kontrol yasasını ele alalım

$$u = K\eta + \bar{K}(\eta)$$

Burada $\bar{K}(\eta) = \mathcal{O}(\eta^2) = \mathcal{O}(\rho^2)$. Ayrıca $\rho = \sqrt{\eta^2 + \eta_2^2}$ ve $\theta = \arctan(\eta_2/\eta_1)$ η 'nin kutupsal koordinatlarda gösterimidir. Verilen kontrol yasası altında kapalı döngü geribesleme sistemi aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= (F_1 + G_1 K)\eta + \varphi(\eta, \zeta) + \gamma_1(\eta, \zeta)K\eta \\ &\quad + (G_1 + \gamma_1(\eta, \zeta))\bar{K}(\eta) \\ \dot{\zeta} &= F_2 \zeta + G_2 K\eta + \varphi(\eta, \zeta) + \gamma_2(\eta, \zeta)K\eta \\ &\quad + (G_2 + \gamma_2(\eta, \zeta))\bar{K}(\eta) \end{aligned} \quad (3)$$

Burada

$$F_1 + G_1 K = \begin{bmatrix} \sigma + g_{1,1}K_1 & -\omega + g_{1,1}K_2 \\ \omega + g_{1,2}K_1 & \sigma + g_{1,2}K_2 \end{bmatrix},$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{12} \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} g_{21} \\ g_{22} \end{bmatrix}$$

ve $K = [K_1 \ K_2]$. Bu sistemi kipsel forma dönüştürürsek

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \bar{F}_1(K)\eta + \bar{\Phi}_1(\eta, \zeta, K) \\ \dot{\zeta} &= F_2 \zeta + \bar{\Phi}_2(\eta, \zeta, K) \end{aligned} \quad (4)$$

Burada

$$\bar{F}_1(K) = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}(K) & -\bar{\omega}(K) \\ \bar{\omega}(K) & \bar{\sigma}(K) \end{bmatrix}$$

ve $\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ doğrusal olmayan terimleri toplamaktadır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(K) &= \sigma + 1/2 g_{1,2}K_2 + 1/2 g_{1,1}K_1 \\ \bar{\omega}(K) &= \frac{1}{2}(-g_{1,2}^2 K_2^2 - 2 g_{1,2}K_2 g_{1,1}K_1 - g_{1,1}^2 K_1^2 \\ &\quad + 4\omega^2 - 4\omega g_{1,1}K_2 + 4 g_{1,2}K_1\omega)^{1/2}. \end{aligned}$$

$\bar{\sigma}$ 'ya açık dinamiğe sahip bir durum olarak bakılırsa, sistem (4) için gezinmelerin yerel davranışını incelemek için merkezi katmanlı uzay kuramını kullanmak mümkün olacaktır. Sistemi kutupsal koordinatlara çevirirsek: $\dot{\rho} = \bar{\sigma}\rho + \mathcal{O}(\rho^2)$, merkezi katmanlı uzaya şu şekilde bir açılımla yaklaşılabılır: $\zeta = h(\rho, \bar{\sigma}) = \alpha_1(K)\rho^2 + \alpha_2(K)\bar{\sigma}^2 + \alpha_3(K)\rho\bar{\sigma} + \mathcal{O}(3)$. Bunu homoloji denkleminde yerine koyarsak:

$$\frac{\partial h}{\partial \rho}(\rho, \bar{\sigma})(\bar{\sigma}\rho + \mathcal{O}(\rho^2)) = F_2 h(\rho, \bar{\sigma}) + \bar{\Phi}_2(\rho, \theta, h(\rho, \bar{\sigma}), K)$$

ve α_i için çözersek: $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Bu durumda merkezi katmanlı uzay için açık olmayan en düşük dereceli yaklaşımlama şu şekilde olmaktadır: $\zeta = h(\rho) = \alpha_1(K)\rho^2 + \text{Y.D.T.}$; bunu yukarıda yerine koyarsak ve kutupsal koordinatlara dönüştürürsek

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= (\bar{\sigma}(K) - \bar{\alpha}(K)\rho^2)\rho + \text{Y.D.T.} \\ \dot{\theta} &= \omega + \bar{\beta}(K)\rho^2 + \text{Y.D.T.} \end{aligned} \quad (5)$$

Burada $\bar{\alpha}(K)$ ve $\bar{\beta}(K)$ merkezi katmanlı uzaya bağlı parametreler olup, Y.D.T. de 'yüksek dereceli terimler' manasına gelmektedir. $\bar{\sigma}(0) > 0$ ve $\bar{\alpha}(0) > 0$ olduğu gerçeği Varsayım 1'in bir sonucudur. (5)'ten görüldüğü üzere, eğer $\bar{\sigma}(K) < 0$ ve $\bar{\alpha}(K) > 0$ ise, o zaman $\rho = 0$ asimptotik karardır. Eğer $\bar{\sigma}(K) < 0$ ve $\bar{\alpha}(K) < 0$ ise $\rho = 0$ kararsızdır ve ayrıca sistemin kararsız bir limit çevrimi vardır. Eğer $\bar{\sigma}(K) > 0$ ve $\bar{\alpha}(K) < 0$ ise $\rho = 0$ kararsızdır ve sistemin limit çevrimi yoktur. İlginç durum $\bar{\sigma}(K) > 0$ ve $\bar{\alpha}(K) > 0$ olduğu durumdur; bu durumda $\rho = 0$ kararsızdır ve sistemin kararlı bir salınımı vardır. Bu salınımın genliği aşağıdaki ifadeyle verilir

$$\rho^* = \sqrt{\frac{\bar{\sigma}(K)}{\bar{\alpha}(K)}}, \quad \omega^* = \omega + \beta(K)\frac{\bar{\sigma}(K)}{\bar{\alpha}(K)} \quad (6)$$

$\bar{\sigma}(K) = \sigma + 1/2 g_{2,2}K_2 + 1/2 g_{1,1}K_1$ ve $\bar{\alpha}(K)$ ifadelerinin merkezi katmanlı uzaydan geldiğini hatırlarsak ve (6) numaralı denkleme bakarsak, geribesleme ile ρ^* değerini azaltmanın iki yolu olduğu görürüz: K vasıtasıyla $\bar{\sigma}(K)$ 'yi azaltmak, veya $\bar{\alpha}(K)$ 'yi artırmak.

$\bar{\sigma}$ 'nin kontrolün doğrusal kısmı ile ilgili olduğunu hatırlayınız. Doğrusal sistem kuramı kullanılarak bir kontrol tasarlanmaya çalışıldığı zamanki yaklaşım, $\bar{\sigma}$ değerini değiştirmek üzerinde odaklanılarak, merkezi katmanlı uzay ile ilgili olan ve kontrolün doğrusal olmayan kısmından gelen terimi ihmal etmek, ve doğrusal kısmın K 'ya göre değişiminin $\bar{\alpha}(K)$ 'ya üstün geleceğini ummaktır.

Yukarıda incelenen yaklaşım kullanılarak yapılan akım kontrolü uygulamalarında örnek olarak silindir etrafı akım için [11] ve kovuk akımı için [15] verilebilir. Bu çalışmalarda yazarlar, sistemi (r, θ) kutupsal koordinatlarına çevirdikten sonra, acı θ 'ya göre ortalama alıp, kontrol vektörü merkez-çevre doğrultülü olacak şekilde K değerini seçmek yöntemini uygulamışlardır. Bunun dışında [20] numaralı referansta sistemin doğrusallaştırılmasına dayanan bir doğrusal karesel kontrol tasarımı yapılmıştır. Ayrıca [5] numaralı referansta kovuk akımı için indirgenmiş dereceli doğrusal modeller akımın altuzayları olarak üretilmiş, ki her model dışsal bozan etkenlerler arasındaki faz farkı ile ilişkilendirilen modları temsil etmektedir, ve bozan etken zayıflatması için bir

değişken parametrelili doğrusal kontrol tasarlanmıştır. Bütün bu çalışmalardaki kontrol sistem parametrelerine dayandığından sistemin çok doğru bir modeline ihtiyaç duyulmakta olması muhtemel dayanıklılık sorunlarını gündeme getirmektedir.

Bu makalenin amacı kontrolün doğrusal olmayan kısmının etkisinin bir incelemesini vermektir; bunu yapmaktaki amaç, $\bar{\alpha}(K)$ vasıtasıyla, doğrusal olmayan terimleri ihmal etmek yerine kullanma yolu seçildiği zaman kontrolün başarımının artırılıp artırılmayacağını görmektir. Bu yaklaşım ayrıca, sistemin doğrusal kontrol edilebilirliğinin sınırlı olmasından dolayı $\bar{\sigma}$ değerinin yeterince azaltılmadığı durumlar için de faydalı olacaktır. Ek bir amaç da, kontrol tasarımında sistem parametrelerini kullanımını sınırlandırarak dayanıklılığı artırmaktır.

Bu amaç doğrultusunda önce ortalama kuramı [6] kullanılarak sistem basitleştirilecek ve kontrol tasarımında kullanılacak yapılar elde edilecektir.

4. MODEL İNDİRGEMESİ VE DOĞRUSAL OLMAYAN KISIMIN İNCELENMESİ

Sistem (2) için, $u(\eta, K)$ biçiminde parametreye bağlı bir kontrol yasası ele alalım. Burada u pürüzsüz olup, $u(0, K) = 0$ ve $\frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0$. Kapalı döngü sistemi aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= F_1 \eta + \varphi_1(\eta, \zeta) \\ &\quad + (G_1 + \gamma_1(\eta, \zeta))u(K, \eta) =: f_\eta(\eta, \zeta) \\ \dot{\zeta} &= F_2 \zeta + \varphi_2(\eta, \zeta) \\ &\quad + (G_2 + \gamma_2(\eta, \zeta))u(K, \eta) =: f_\zeta(\eta, \zeta) \end{aligned} \quad (7)$$

Zamanla değişen $\eta^\vartheta = R(\vartheta)\eta$ periyodik koordinat değişimini tanımlayalım. Burada

$$R(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}, \quad \vartheta = \omega_c t$$

ve ω_c limit çevriminin salınım frekansı olup, (6) ifadesindeki gibidir. Burada ϑ değişkenine yeni bir zaman ölçeği gözüyle bakılabilir. Üstteki dönüşümü kullanarak aşağıdaki ifade elde edilebilir

$$\begin{aligned} \dot{\eta}^\vartheta &= R^T(\vartheta)f_\eta(R(\vartheta)\eta, \zeta) =: f_\eta^\vartheta(\vartheta, \eta^\vartheta, \zeta^\vartheta) \\ \dot{\zeta}^\vartheta &= f_\zeta(R(\vartheta)\eta, \zeta) =: f_\zeta^\vartheta(\vartheta, \eta^\vartheta, \zeta^\vartheta). \end{aligned} \quad (8)$$

$\epsilon = \omega_c^{-1}$ şeklinde tanımlarsak

$$\begin{aligned} \frac{d\eta^\vartheta}{d\vartheta} &= \epsilon f_\eta^\vartheta(\vartheta, \eta^\vartheta, \zeta^\vartheta) \\ \frac{d\zeta^\vartheta}{d\vartheta} &= \epsilon f_\zeta^\vartheta(\vartheta, \eta^\vartheta, \zeta^\vartheta) \end{aligned} \quad (9)$$

Burada f_η^ϑ and f_ζ^ϑ değişkenleri ϑ ve ϵ değişkenlerine göre sınırlıdır çünkü bunlar sadece sin ve cos fonksiyonları içerisinde yer almaktadır. ϑ 'ya yeni bir zaman değişkeni olarak bakılır ve $\vartheta \in [0, 2\pi]$ aralığında ortalama alınırsa aşağıdaki ortalama sistemi elde edilir

$$\frac{d\eta^{\vartheta*}}{d\vartheta} = \epsilon(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f_\eta^\vartheta(\vartheta, \eta^\vartheta, \zeta^\vartheta) d\vartheta \quad (10)$$

$$\frac{d\zeta^{\vartheta*}}{d\vartheta} = \epsilon(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f_\zeta^\vartheta(\vartheta, \eta^\vartheta, \zeta^\vartheta) d\vartheta. \quad (11)$$

Buradan $t = \epsilon\vartheta$ özgün zaman ölçeğine geri dönülür ve (8) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\eta^{\vartheta*}}{dt} &= (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} R^T(\vartheta)f_\eta(R(\vartheta)\eta, \zeta) d\vartheta \\ \frac{d\zeta^{\vartheta*}}{dt} &= (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f_\zeta(R(\vartheta)\eta, \zeta) d\vartheta. \end{aligned} \quad (12)$$

Yukarıdaki f_η^ϑ ve f_ζ^ϑ değerlerinin $u(\eta, K)$ giriş değerine örtük olarak bağlı olduğunu hatırlayalım. İfadeleri basitleştirmek için bu noktadan sonra ϑ^* üstsimgesi kullanılmayacaktır.

Önceki bölümde belirtildiği gibi buradaki amaç kontrolün doğrusal olmayan kısmının etkisini tek başına incelemektir. Fazdan bağımsız $u = u(\rho, K)$ biçimindeki herhangi bir kontrol yasasının bunu başaracağını ve aşağıdaki gibi bir ortalama sistem dinamiğine sebep vereceğini göstermek mümkündür

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_1(\eta, \zeta) \\ \Phi_2(\eta, \zeta) \end{bmatrix} \\ &\quad + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(\eta) \\ g_2(\zeta) \end{bmatrix} \right) u(\rho, K) \end{aligned} \quad (13)$$

Burada

$$\begin{aligned} \Phi_1(\eta, \zeta) &= \begin{bmatrix} \phi_{11}\eta_1\zeta_1 + \phi_{12}\eta_1\zeta_2 + \phi_{21}\eta_2\zeta_1 + \phi_{22}\eta_2\zeta_2 \\ -\phi_{21}\eta_1\zeta_1 - \phi_{22}\eta_1\zeta_2 + \phi_{11}\eta_2\zeta_1 + \phi_{12}\eta_2\zeta_2 \end{bmatrix} \\ \Phi_2(\eta, \zeta) &= \begin{bmatrix} \phi_{31}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \phi_{32}\zeta_1^2 + \phi_{33}\zeta_2^2 + \phi_{34}\zeta_1\zeta_2 \\ \phi_{41}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \phi_{42}\zeta_1^2 + \phi_{43}\zeta_2^2 + \phi_{44}\zeta_1\zeta_2 \end{bmatrix} \\ B_2 &= \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{bmatrix}, \quad g_1(\eta) = \begin{bmatrix} g_{11}\eta_1 + g_{12}\eta_2 \\ -g_{12}\eta_1 + g_{11}\eta_2 \end{bmatrix}, \\ g_2(\zeta) &= \begin{bmatrix} g_{31}\zeta_1 + g_{32}\zeta_2 \\ g_{41}\zeta_2 + g_{42}\zeta_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Bu noktadan itibaren giriş $u = K\rho^2$ olarak sabitlenecektir.

Açıklama 2. Giriş için yapılan bu seçime bazı açıklamalar getirelim: Öncelikle $u = K\rho$ biçiminde bir kontrol yasası, $\eta = 0$ noktasında pürüzsüz olmadığından kullanılamaz. İkinci olarak, yukarıdaki biçimi faza bağımlı bir kontrol kullanarak da elde etmek mümkündür. Örneğin, $u = \frac{\pi}{2}K\rho^2 \sin(\frac{1}{2}\theta)$ biçiminde bir kontrol için ortalama sistem denklemlerinin (13) ifadesindeki denklemlerin aynısı olacağını göstermek mümkündür.

Yukarıdaki ifade $\rho = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$ ve $\theta = \arctan(\eta_2/\eta_1)$ dönüşümü ile kutupsal koordinatlarda ifade edilirse

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= (\sigma + \phi_{1,1}\zeta_1 + \phi_{1,2}\zeta_2 + g_{1,1}K\rho^2) \rho \\ \dot{\theta} &= \omega - \phi_{2,1}\zeta_1 - \phi_{2,2}\zeta_2 - g_{1,2}K\rho^2 \\ \dot{\zeta}_1 &= -\lambda_1\zeta_1 + \phi_{3,4}\zeta_1\zeta_2 + \phi_{3,2}\zeta_1^2 + \phi_{3,3}\zeta_2^2 + \phi_{3,1}\rho^2 \\ &\quad + (b_{2,1} + g_{3,1}\zeta_1 + g_{3,2}\zeta_2) K\rho^2 \\ \dot{\zeta}_2 &= -\lambda_2\zeta_2 + \phi_{4,4}\zeta_1\zeta_2 + \phi_{4,2}\zeta_1^2 + \phi_{4,3}\zeta_2^2 + \phi_{4,1}\rho^2 \\ &\quad + (b_{2,2} + g_{4,1}\zeta_1 + g_{4,2}\zeta_2) K\rho^2 \end{aligned} \quad (14)$$

(14) ifadesinden, σ değişkeni apaçık dinamiğe sahip bir durum

olarak görülürse, aşağıdaki ifade yazılabilir

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\rho} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ \rho \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_{11}(\sigma, \rho, \zeta) \\ \varphi_{12}(\sigma, \rho, \zeta) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \varphi_{21}(\sigma, \rho, \zeta) \\ \varphi_{22}(\sigma, \rho, \zeta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

Burada $\varphi_1 = [\varphi_{11} \ \varphi_{12}]^T$ ve $\varphi_2 = [\varphi_{21} \ \varphi_{22}]^T$, (14) ifadesindeki doğrusal olmayan terimleri içermektedir. Açıkça görülebilir ki $\varphi_1(0, 0, 0) = \varphi_2(0, 0, 0) = 0$. O halde sistem (15) için $\zeta = \bar{\zeta}(\sigma, \rho)$ şeklinde bir merkezi katmanlı uzay vardır. Burada $\bar{\zeta} = [\bar{\zeta}_1 \ \bar{\zeta}_2]^T$. Merkezi katmanlı uzay $i = 1, 2$ için aşağıdaki denklemi sağlar

$$\frac{\partial \bar{\zeta}_i}{\partial \rho} \varphi_{12}(\sigma, \rho, \bar{\zeta}(\sigma, \rho)) = -\lambda_i \bar{\zeta}_i(\sigma, \rho) + \varphi_{2i}(\sigma, \rho, \bar{\zeta}_i(\sigma, \rho)) \quad (16)$$

ve sistem (15) dinamiği yerel olarak bu merkezi katmanlı uzaya çekilir [19].

(16) ifadesindeki türevsel denklemler doğrudan çözmek için fazla karışık olduğundan, aşağıdaki gibi bir yaklaşılamaya gereksinim vardır

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}_i(\rho, \sigma) &= c_{i,0}(\sigma) + c_{i,1}(\sigma)\rho + c_{i,2}(\sigma)\rho^2 + c_{i,3}(\sigma)\rho^3 \\ &+ c_{i,4}(\sigma)\rho^4 + \mathcal{O}(\rho^5) \end{aligned} \quad (17)$$

Bu yaklaşılamamın, merkezi katmanlı uzay koşulları olan, $i = 1, 2$ için $\bar{\zeta}_i(0, 0) = 0$, $D\bar{\zeta}_i(0, 0) = 0$ ifadelerini sağlayabilmesi için, $c_{i,0}(0) = 0$, $c_{i,1}(0) = 0$ koşullarını sağlaması zorunludur. (17) ifadesini (16) ifadesinde yerine koyar ve katsayıları çözersek

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= 0, \quad c_{2,0} = 0, \quad c_{1,1} = 0, \quad c_{2,1} = 0 \\ c_{1,2} &= \frac{2\sigma K b_{2,1} + 2\sigma \phi_{3,1} + \lambda_2 K b_{2,1} + \lambda_2 \phi_{3,1}}{4\sigma^2 + 2\sigma\lambda_2 + 2\lambda_1\sigma + \lambda_1\lambda_2} \\ c_{2,2} &= \frac{2\sigma K b_{2,2} + 2\sigma \phi_{4,1} + \lambda_1 K b_{2,2} + \lambda_1 \phi_{4,1}}{4\sigma^2 + 2\sigma\lambda_2 + 2\lambda_1\sigma + \lambda_1\lambda_2} \\ c_{1,3} &= 0, \quad c_{2,3} = 0 \\ c_{1,4} &= [\lambda_2 c_{2,2} g_{3,2} K + \lambda_2 c_{1,2} g_{3,1} K + \lambda_2 c_{2,2} c_{1,2} \phi_{3,4} \\ &- 2\lambda_2 c_{1,2} \phi_{1,2} c_{2,2} - 2\lambda_2 c_{1,2} g_{1,1} K \\ &+ 4\sigma c_{2,2} c_{1,2} \phi_{3,4} + 4\sigma c_{2,2} g_{3,2} K + 4\sigma c_{1,2} g_{3,1} K \\ &- 8\sigma c_{1,2} \phi_{1,2} c_{2,2} - 8\sigma c_{1,2} g_{1,1} K - 8\sigma \phi_{1,1} c_{1,2}^2 \\ &+ 4\sigma c_{1,2}^2 \phi_{3,2} + 4\sigma c_{2,2}^2 \phi_{3,3} - 2\lambda_2 \phi_{1,1} c_{1,2}^2 \\ &+ \lambda_2 c_{1,2}^2 \phi_{3,2} + \lambda_2 c_{2,2}^2 \phi_{3,3}] \\ &/ [4\sigma\lambda_2 + 4\lambda_1\sigma + \lambda_1\lambda_2 + 16\sigma^2] \\ c_{2,4} &= [\lambda_1 c_{2,2} c_{1,2} \phi_{4,4} - 2\lambda_1 c_{2,2} g_{1,1} K - 2\lambda_1 c_{2,2} \phi_{1,1} c_{1,2} \\ &+ 4\sigma c_{1,2} g_{4,1} K + 4\sigma c_{2,2} g_{4,2} K + 4\sigma c_{2,2} c_{1,2} \phi_{4,4} \\ &- 8\sigma c_{2,2} g_{1,1} K - 8\sigma c_{2,2} \phi_{1,1} c_{1,2} + \lambda_1 c_{1,2} g_{4,1} K \\ &+ \lambda_1 c_{2,2} g_{4,2} K + 4\sigma c_{2,2}^2 \phi_{4,3} + 4\sigma c_{1,2}^2 \phi_{4,2} \\ &+ \lambda_1 c_{2,2}^2 \phi_{4,3} + \lambda_1 c_{1,2}^2 \phi_{4,2} - 8\sigma \phi_{1,2} c_{2,2}^2 \\ &- 2\lambda_1 \phi_{1,2} c_{2,2}^2] \\ &/ [4\sigma\lambda_2 + 4\lambda_1\sigma + \lambda_1\lambda_2 + 16\sigma^2]. \end{aligned}$$

Bu ifade tamamen açılır, sadeleştirilir ve benzer terimler toplanırsa aşağıdaki gibi bir yapı elde edilir

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= \mu_{1,2,1} + \mu_{1,2,2} K \\ c_{2,2} &= \mu_{2,2,1} + \mu_{2,2,2} K \\ c_{1,4} &= \mu_{1,4,1} + \mu_{1,4,2} K + \mu_{1,4,3} K^2 \\ c_{2,4} &= \mu_{2,4,1} + \mu_{2,4,2} K + \mu_{2,4,3} K^2. \end{aligned} \quad (18)$$

(18) eşitliği (17) ifadesinde yerie konur ve bu da (14) ifadesinde yerine konduktan sonra benzer terimler toplanır

$$\dot{\rho} = (\sigma + d_1 \rho^2 + d_2 \rho^4) \rho \quad (19)$$

Burada

$$\begin{aligned} d_1 &= \phi_{1,2} (\mu_{2,2,1} + \mu_{2,2,2} K) + \phi_{1,1} (\mu_{1,2,1} + \mu_{1,2,2} K) \\ d_2 &= \phi_{1,1} (\mu_{1,4,1} + K\mu_{1,4,2} + K^2\mu_{1,4,3}) \\ &+ \phi_{1,2} (\mu_{2,4,1} + K\mu_{2,4,2} + K^2\mu_{2,4,3}) \end{aligned} \quad (20)$$

Yukarıdaki (19) numaralı ifadedede $\sigma + d_1 \rho^2 + d_2 \rho^4$ polinomunun artı değerli kökleri $\{\rho_1, \rho_2\}$ aşağıdaki gibi elde edilir

$$\{\rho_1, \rho_2\} = \sqrt{\frac{-d_1 \pm \sqrt{d_1^2 - 4d_2\sigma}}{2d_2}} \quad (21)$$

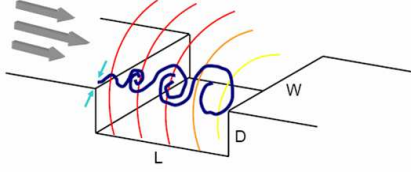
Şimdi (21) denkemindeki kökleri d_1 ve d_2 'nin işaretine göre inceleyelim. Öncelikle $\sigma > 0$ olduğunu hatırlayımız ve herhangi bir artı kök bulunabilmesi için $d_1^2 - 4\sigma d_2 > 0$ olması gerektiğini gözlemleyiniz. Bu noktadan sonra bu eşitsizliğin sağlandığı varsayılacaktır.

Eğer $d_2 > 0$ ise, (21) ifadesinin gerçel kökü olabilmesi için $-d_1 \pm \sqrt{d_1^2 - 4\sigma d_2} > 0$ olması gerekir. Eğer $d_1 > 0$ ise $-d_1 + \sqrt{d_1^2 - 4\sigma d_2} > 0$ olması imkansızdır ve $-d_1 + \sqrt{d_1^2 - 4\sigma d_2} > 0$ olması için $d_2 < 0$ olması gereklidir ki şu andaki durum için bu da mümkün değildir. O halde $d_2 < 0$, $d_1 > 0$ durumunda gerçel çözüm yoktur. Eğer $d_1 < 0$ ise $-d_1 + \sqrt{d_1^2 - 4\sigma d_2} > 0$ ifadesinin sağlandığı açıktır. $-d_1 - \sqrt{d_1^2 - 4\sigma d_2} > 0$ ifadesi de bu durum için $d_2 > 0$ olduğundan sağlanmaktadır. O halde $d_2 < 0$, $d_1 < 0$ için iki gerçel çözüm vardır.

Eğer $d_2 < 0$ ise, (21) ifadesinin gerçel kökü olabilmesi için $-d_1 \pm \sqrt{d_1^2 - 4\sigma d_2} < 0$ olması gerekir. Eğer $d_1 > 0$ ise $-d_1 + \sqrt{d_1^2 - 4\sigma d_2} < 0$ ifadesi $d_2 > 0$ olduğundan sağlanmaz. Fakat bu durumda $-d_1 - \sqrt{d_1^2 - 4\sigma d_2} < 0$ ifadesi sağlanmakta olduğundan $d_2 < 0$, $d_1 > 0$ durumu için sadece bir gerçel çözüm olduğu görülür. Eğer $d_1 < 0$ ise $-d_1 + \sqrt{d_1^2 - 4\sigma d_2} < 0$ sağlanmaz fakat $-d_1 - \sqrt{d_1^2 - 4\sigma d_2} < 0$ sağlanır. O halde $d_2 < 0$, $d_1 < 0$ için de tek gerçel çözüm vardır. Bu iki sonuç birleştirilirse $d_2 < 0$ için her zaman tek gerçel çözüm olacağı görülür.

5. ÖRNEK

Galerkin modeli akım kontrolü uygulamalarında akım dinamiğini tanımlayan indirgenmiş dereceli bir model olarak sıkça kullanılmaktadır. Örnek olarak bir kovuk üzerindeki hava akımının bir sentetik jet eyleyici, örneğin bir akustik eyleyici ile kontrolü verilebilir. (bkz. Şekil 1). Kovuk akımı sistemi için



Şekil 1: Akustik eyleyici ile kovuk üstündeki hava akımının kontrolü

İndirgenmiş dereceli bir model türetmek için önce aşağıdaki Navier-Stokes denklemleri ile başlayalım

$$\partial_t u + \nabla \cdot (u u) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta u \quad (22)$$

Sistem girişi, sınır koşulları içinde gömülüdür. Yukarıda $u(x, t)$ hız alanı, p basınç ve Re Reynold sayıdır. Daha sonra sistem için ast dikiğin ayrışım (POD) modları elde edilir; bunlara $\{u_i(x)\}_{i=0}^N$ diyelim. Bu POD modları birimdir, yani $(u_i, u_j)_\Omega = \delta_{ij}$; burada Ω uzamsal akım tanım kümesidir ve iç çarpım $(u, v) := \int_\Omega u \cdot v dV$ şeklinde tanımlanmaktadır. Hız vektörü u 'nun POD modları üzerine izdüşümünden aşağıdaki POD açılımı elde edilir

$$u(x, t) \approx u^{[N]} = u_0(x) + \sum_{i=1}^N a_i(t) u_i(x) \quad (23)$$

Burada $a_i(t)$ katsayıları zaman bağımlılığını kapsar. Sonraki aşama Galerkin izdüşümüdür (GP). Bunun için (23) ifadesi (22) ifadesinde yerine konarak zaman katsayıları $\{a_i(t)\}_{i=0}^N$ cinsinden dinamik denklemler elde edilir. Bundan sonra $\tilde{a} = a - a_0$ işleminle sistem durumu, denge noktası a_0 kadar kaydırılınca aşağıdaki sonuç elde edilir

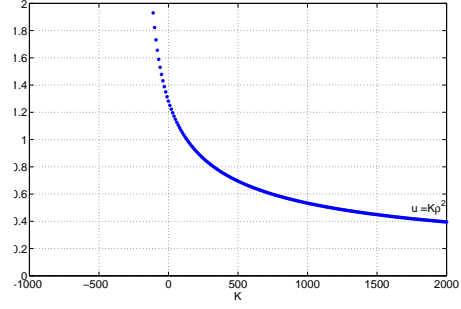
$$\begin{aligned} \dot{\tilde{a}}_i &= \frac{1}{Re} \sum_{j=1}^N \tilde{l}_{ij} \tilde{a}_j + \sum_{j,k=1}^N \tilde{q}_{ijk} \tilde{a}_j \tilde{a}_k \\ &+ \left(\tilde{r}_i + \sum_{j=0}^N \tilde{s}_{ij} \tilde{a}_j \right) u \end{aligned} \quad (24)$$

Burada l_{ij} , q_{ijk} , r_i ve s_{ij} Galerkin sistemi katsayılarıdır. Bu sistem (1) ile kıyaslandığında makalede üzerinde çalışılan yapıda olduğu görülmektedir. O halde $u = K\rho^2$ kontrolü uygulandığında indirgenmiş sistem (19) ifadesindeki biçimde olacaktır. Sayısal benzetim için, [20] çalışmasındaki kovuk akımı deney kurulumundaki değerler kullanılacaktır. Bu değerleri kullanarak (20) ifadesindeki d_1 ve d_2 değerleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir

$$\begin{aligned} d_1 &= -5.0579 \cdot 10^{-4} K - 0.0876 \\ d_2 &= -7.4279 \cdot 10^{-8} K^2 - 1.0121 \cdot 10^{-4} - 0.0149 \end{aligned} \quad (25)$$

Yine yukarıdaki denklemlerden ayırtaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanabilir

$$\begin{aligned} d_1^2 - 4\sigma d_2 &= 3.1053 \cdot 10^{-7} K^2 + 1.6316 \cdot 10^{-4} K \\ &+ 0.0187 \end{aligned} \quad (26)$$



Şekil 2: Yatışkın durumdaki salınım genliği ρ^* kontrol kazancı K 'ye karşı

Yukarıdaki denklemlerin incelenmesinden d_1 değerinin $K < -173.2063$ için artı değerli ve $K > -173.2063$ için eksi değerli; d_2 değerinin $K < -1194.3$ veya $K > -168.2720$ için artı değerli ve $K > -168.2720$ için eksi değerli; $d_1^2 - 4\sigma d_2$ değerinin ise $K < -357.0527$ veya $K > -168.3783$ için artı değerli ve $-357.0527 < K < -168.3783$ için eksi değerli olduğu görülür. Buradan, önceki bölümdeki inceleme sonuçlarına dayanarak, $K \in (-1194.3, -168.3783)$ için sıfır, $K \in (-\infty, -1194.3) \cup (-168.2720, \infty)$ için bir, ve $K \in (-168.3783, -168.2720)$ için iki artı değerli gerçel çözüm olduğunu sonucu çıkmaktadır. Şekil 2, $K \in [-1000, 1000]$ aralığında, salınım genliği ρ^* 'ın, kontrol kazancı olan K 'ye göre değişimini göstermektedir. Bu grafik yukarıdaki merkezi katmanlı uzay çözümlemesine dayanarak hesaplanmıştır. Bu aralıkta, K 'nin artı değerlerinin ρ^* 'ı azalttığı, eksi değerlerinin ise $K \approx -200$ 'ya kadar artırdığı, bu K değerinden sonra da sistemin kararlı bir salınımı olmadığı görülmektedir.

6. BENZETİM SONUÇLARI

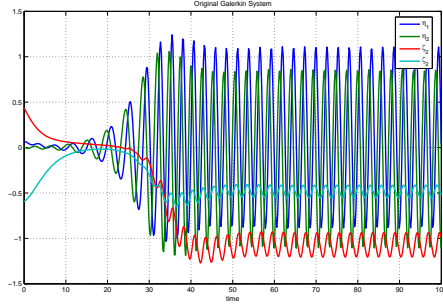
Önceki bölümlerdeki çözümlemelerin geçerliliğini göstermek ve indirgenmiş ortalama sisteminin özgün Galerkin sistemine ne kadar iyi bir yaklaşıklık olduğunu görmel için bu iki sistem üzerinde bir dizi MATLAB benzetimi yapılmıştır. Önceki bölümde söylendiği gibi [20] referansındaki parametreler kullanılmıştır.

Şekil 3 özgün sistem ve ortalama sistemi için açık döngüdeki benzetim sonuçlarını göstermektedir. Sistemin bir süre sonra genliği 1 civarında bir salınım sürdürdüğü gözlemlenmektedir. Bu sonuç Şekil 2'deki merkezi katmanlı uzay yönteminin öngörüsü ile tutarlıdır.

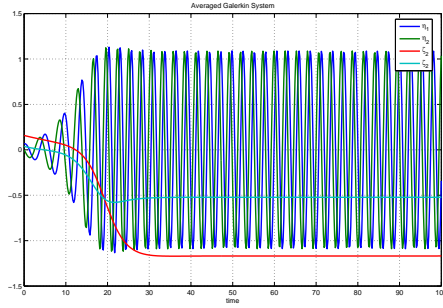
Şekil 4 özgün sistem ve ortalama sistemi için $u = K\rho^2$ ve $K = 500$ olduğu durumu göstermektedir. Sistemin hala kararlı bir salınımı olmakla birlikte, bu salınımın genliğinin 0.6-0.7 civarına düştüğü gözlemlenmektedir. Bu sonuç da Şekil 2'deki merkezi katmanlı uzay yönteminin öngörüsü ile tutarlıdır.

Şekil 5 özgün ve ortalama sistemi için $u = K\rho^2$ ve $K = -100$ olduğu durumu göstermektedir. Salınım genliğinin 1.5 civarına çıktığı gözlemlenmektedir. Sistemin bu davranışı da, Şekil 2'de görüldüğü üzere, merkezi katmanlı uzay yöntemi tarafından tahmin edilen davranış ile tutarlıdır.

Şekil 6 özgün ve ortalama sistemi için $u = K\rho^2$ ve



(a) Özgün



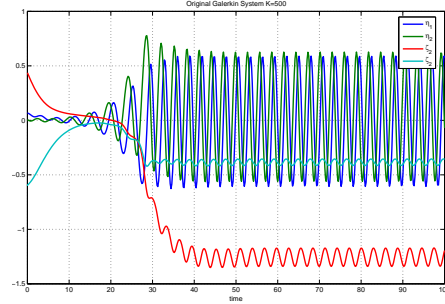
(b) Ortalama

Şekil 3: Kontrolsüz durumda özgün ve ortalama Galerkin sistemleri

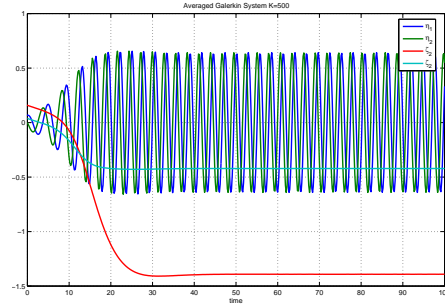
$K = -200$ olduğu durumu göstermektedir. Bu K değeri için sistemin kararlı bir salınımına yakınsamadığı ve en nihayetinde kararsızlaştığı gözlemlenmektedir. Bu sonuç da yine önceki bölümdeki çözümlere ve Şekil 2 ile tutarlıdır: $K = -200$ değeri $(-168.3783, -168.2720)$ aralığında olup, bu aralıkta ρ^* için artı değerli gerçel kök bulunmadığı sonucuna önceki bölümde varılmıştı.

7. SONUÇLAR VE GELECEKTEKİ ÇALIŞMALAR

Bu makalede dinamiği bir Galerkin modeli tarafından belirlenen doğrusal olmayan bir kontrol sistemi üzerinde çalışılmıştır. Sıfır giriş için bir Hopf çatallanması gösteren bir model üzerinde odaklanılmıştır; bu akım kontrolü uygulamalarında sıkça karşımıza çıkan bir modeldir. Kipsel formlar ve merkezi katmanlı uzay kuramı kullanılarak doğrusal kontrolün etkisi incelenmiştir. Bunun sonucunda salınım genişliğinin, hep doğrusal terimlere hem de merkezi katmanlı uzaya bağlı terimlere dayandığı görülmüştür. Sonucunu doğrusal kontrol tasarımında genellikle ihmal edilmekle beraber, sadece bu terimleri kullanarak da salınımın azaltılabileceği savunulmuştur. Zamanla değişen bir koordinat değişimi, zaman ölçeklemesi ve ortalama kuramı kullanılarak sistem modeli basitleştirilmiştir. Bu yordam ile, belli kontrol tipleri için, özgün sistemden çok daha açık yapıya sahip bir sisteme ulaşıldığı görülmüştür. Merkezi katmanlı uzayı kullanılarak ortalama sistemi daha da basitleştirildikten



(a) Özgün



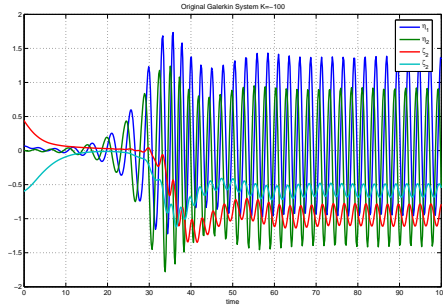
(b) Ortalama

Şekil 4: $u = K\rho^2$ ve $K = 500$ için özgün ve ortalama Galerkin sistemleri.

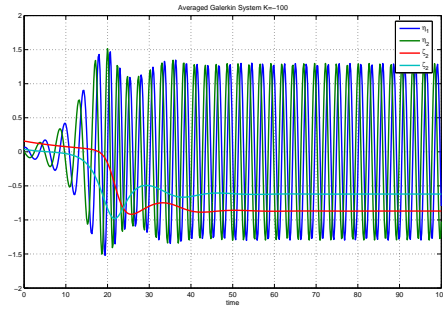
sonra kapalı döngü sisteminin limit çevrimlerinin sayısını ve kararlılık tipini belirleyen koşullar çıkarmak ve salınım genişliğini belirten ifadeler üretmek mümkün olmuştur. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, kovuk akımı kontrolü problemi örneği üzerinde denenmiş ve doğrulanmıştır. Gelecekteki çalışmalar arasında Galerkin modeli için gözlemci tasarımı ve sonuçların gerçek bir kovuk akımı deney sistemi üzerinde doğrulanması sayılabilir.

8. Kaynakça

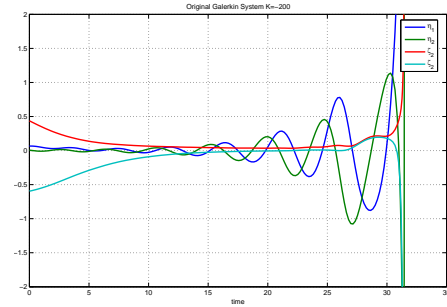
- [1] A. Armaou and P. D. Christofides. Finite-dimensional control of nonlinear parabolic pde systems with time-dependent spatial domains using empirical eigenfunctions. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 11(2):287–317, 2001.
- [2] S. Behtash and S. Sastry. Stabilization of nonlinear systems with uncontrollable linearization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(6):585–90, 1988.
- [3] Daizhan Cheng and C. Martin. Stabilization of nonlinear systems via designed center manifold. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(9):1372 – 1383, Sept 2001.
- [4] N. H. El-Farra, A. Armaou, and P. D. Christofides. Analysis and control of parabolic pde systems with input constraints. *Automatica*, 39(4):715–25, 2003.
- [5] Kristin Fitzpatrick, Yunfei Feng, Rick Lind, Andrew J.



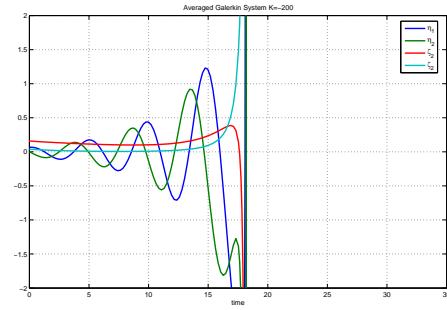
(a) Özgün



(b) Ortalama



(a) Özgün



(b) Ortalama

Şekil 5: $u = K\rho^2$ ve $K = -100$ için özgün ve ortalama Galerkin sistemleri.

Şekil 6: $u = K\rho^2$ ve $K = -200$ için özgün ve ortalama Galerkin sistemleri.

Kurdila, and David W. Mikolaitis. Flow control in a driven cavity incorporating excitation phase differential. *JOURNAL OF GUIDANCE, CONTROL, AND DYNAMICS*, 28(1):63–70, January 2005.

- [6] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall,, Upper Saddle River, NJ :, c1996.
- [7] Wei Lin and C.I. Byrnes. Design of discrete-time nonlinear control systems via smooth feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(11):2340 – 2346, Nov 1994.
- [8] B. R. Noack, K. Afanasiev, M. Morzynski, G. Tadmor, and F. Thiele. A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. *Journal of Fluid Mechanics*, 497:335–63, 2003.
- [9] B. R. Noack and H. Eckelmann. A global stability analysis of the steady and periodic cylinder wake. *Journal of Fluid Mechanics*, 270:297–330, 1994.
- [10] B. R. Noack, P. Papas, and P. A. Monkewitz. The need for a pressure-term representation in empirical galerkin models of incompressible shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 523:339–65, 2005.
- [11] B.R. Noack, G. Tadmor, and M. Morzyński. Actuation models and dissipative control in empirical Galerkin models of fluid flows. In *The 2004 American Control Conference*, pages 0001–0006, Boston, MA, U.S.A., June 30–July 2, 2004, 2004. Paper **FrP15.6**.

- [12] B.R. Noack, G. Tadmor, and M. Morzynski. Low-dimensional models for feedback flow control. Part I: Empirical galerkin models. In *2nd AIAA Flow Control Conference*, Portland, Oregon, U.S.A., June 28 – July 1, 2004, 2004. AIAA Paper 2004-2408 (invited contribution).
- [13] O. K. Rediniotis, Jeonghwan Ko, and A. J. Kurdila. Reduced order nonlinear Navier-Stokes models for synthetic jets. *Transactions of the ASME. Journal of Fluids Engineering*, 124(2):433–443, 2002.
- [14] C. W. Rowley, T. Colonius, and R. M. Murray. Model reduction for compressible flows using pod and galerkin projection. *Physica D*, 189(1-2):115–29, 2004.
- [15] C. W. Rowley and V. Juttijudata. Model-based control and estimation of cavity flow oscillations. In *CDC-ECC '05 44th IEEE Conference on Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference.*, pages 512 – 517, Dec 2005.
- [16] C. W. Rowley and J. E. Marsden. Reconstruction equations and the karhunen-loeve expansion for systems with symmetry. *Physica D*, 142(1-2):1–19, 2000.
- [17] S. N. Singh, J. H. Myatt, G. A. Addington, S. Banda, and J. K. Hall. Optimal feedback control of vortex shedding using proper orthogonal decomposition models. *Transactions of the ASME. Journal of Fluids Engineering*, 123(3):612–618, 2001.

- [18] G. Tadmor, B.R. Noack, M. Morzynski, and S. Siegel. Low-dimensional models for feedback flow control. Part II: Controller design and dynamic estimation. In *2nd AIAA Flow Control Conference*, Portland, Oregon, U.S.A., June 28 – July 1, 2004, 2004. AIAA Paper 2004-2409 (invited contribution).
- [19] Stephen Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag,, New York :, c1990.
- [20] X. Yuan, E. Caraballo, M. Debiasi, J. Little, A. Serrani, H. Özbay, and M. Samimy. Experimental results and bifurcation analysis on scaled feedback control for subsonic cavity flows. Accepted to the 2006 Mediterranean Control Conference, Ancona, Italy, 2006.