

AKIŞ KONTROLÜ PROBLEMLERİ İÇİN DALGACIK DÖNÜŞÜMÜ İLE BÖLGESEL DİNAMİK MODELLEME

¹Türker Nazmi ERBİL, ¹Coşku KASNAKOĞLU

¹Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
T.O.B.B Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Söğütözü/ANKARA
{tnerbil,kasnakoglu}@etu.edu.tr

Özetçe

Bu çalışmada dalgacık dönüşümü ile akış kontrolü problemleri için bölgesel dinamik modeller elde edilmesi konusu irdelenmiştir. Önce akışı temsil eden Navier-Stokes denklemlerinin hesaplamalı akışkanlar dinamiği benzetimlerinden akışın anlık görüntüleri elde edilmiştir. Dalgacık dönüşümü, eşikleme ve geri çatılma ile bu anlık görüntülerin, dalgacık katsayılarından yalnızca yaklaşıklama katsayıları kullanılarak yeterli derecede iyi temsil edilebildiği görülmüştür. Bunun ardından akışın ilgilenilen bölgesini temsil eden dalgacık katsayıları kullanılarak taban vektörleri oluşturulmuş ve akışın bu taban vektörleri cinsinden açılımı elde edilmiştir. Taban vektörü katsayıların zamana bağlı değişimi elde edildikten sonra alt uzay tanımlama yöntemleri ile bu değişimi temsil eden düşük boyutlu bir dinamik sistem modeli oluşturulmuştur. Geliştirilen yaklaşımlar karesel bir alan üzerinde Navier-Stokes denklemleri ile yönetilen ve girişin sınır koşullarından sistemi etkilediği bir akış örneğine uygulanmış ve başarılı sonuçlar verdiği görülmüştür.

1. Giriş

Akışkan akışları temel olarak sıvı ve gazların hareketini içerir ki bu tür hareketler günlük hayatın ayrılmaz bir parçasıdır. Uçan bir uçağın kanadı etrafındaki hava akışı, bir denizaltının gövdesinin etrafındaki su akışı, boru hatlarındaki petrol akışları hep akışkan akışlarına örnektir. Böylesine sık karşılaşılan bir kavramın anlaşılması ve modellenmesi bilimsel ve teknolojik açıdan çok önemlidir [1, 2].

Akışkan akışlarının dinamik modellenmesinde en çok kullanılan yöntemlerden biri Uygun Dikgen Ayrışım (UDA)/Galerkin İzdüşümü (Gİ) teknikleri olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu tekniklerde akış enerjisinin büyük bir kısmını içerek şekilde bir sonlu alt uzay oluşturacak UDA kipleri hesaplanır ve bu kipler ile akışın bir açılımı elde edilir. Bu açılım, akışı temsil eden Navier-Stokes, Burgers vb. kısmi türevsel denklemlerde (KTD) yerine konarak Gİ vasıtasıyla UDA katsayıları cinsinden dinamik sistemler elde edilir [3-13].

Bu yöntemler düşük boyutlu dinamik modeller vermekle beraber, bu modeller doğrusal olmayan modeller olduklarından üzerlerinde analiz ve kontrol tasarımı yapmak oldukça zordur. Bu modellerle ilgili bir başka sıkıntı da, elde edilen UDA kiplerinin destek alanının neredeyse akış alanının tamamına yayılması ve bu sebeple de akışın sadece bir

bölgesini ilgilendiren yerel modelleme ve analizler yapılmak istendiğinde sıkıntı yaşanmasıdır.

Bu makalede dalgacık ayrışım teknikleri [14-17] kullanılarak, akış problemlerinin modellenmesinde kullanılacak ve yukarıda anlatılan sıkıntıları giderebilecek bir dinamik modelleme yaklaşımı üzerinde durulacaktır. Önce incelenmek istenen akışın anlık görüntülerinin dalgacık ayrışımı elde edilecek ve sadece yaklaşıklama katsayıları ile akış görüntülerinin yeterince iyi biçimde temsil edilebildiği gözlemlenecektir. Daha sonra sadece istenilen bölgeyi ilgilendiren yaklaşıklama katsayıları için dalgacık fonksiyonları elde edilecek ve bu fonksiyonlar üzerinde akışın dinamik değişimi hesaplanacaktır. Elde edilen bu dinamik değişimler kullanılarak sistem tanımlama teknikleri vasıtasıyla düşük boyutlu doğrusal bir sistem elde edilecek ve akış verileri ile uyduğu gözlemlenecektir. En son olarak da sonuç ve gelecekteki çalışmalar ile bildiri sonlandırılacaktır.

2. Temel Bilgiler

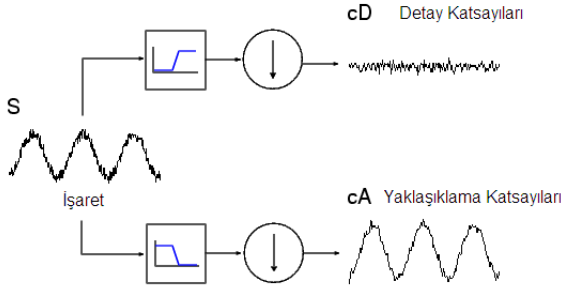
2.1.1. Dalgacık Dönüşümü

Dalgacık analizi yöntemi sinyal işleme konusunda en sık kullanılan yöntemlerden birisi olup, konuyla ilgili sayısız kaynak ve çalışma bulmak mümkündür [14-17]. Dalgacık, temel olarak sınırlı bir sürede salınım yapan ve ortalaması ise sıfır değerinde bir dalga formudur. Fourier analizinde kullanılan sinüs dalgalarıyla kıyasladığımızda dalgacık dalgalarının en büyük avantajı bölgesel analiz yapılmasına olanak vermesidir. Fourier dönüşümüyle benzer olarak dalgacık dönüşümü de dalgacık fonksiyonunun kaydırılmış ve ölçeklendirilmiş halinin bütün zamanlar üzerindeki toplamıdır. Aşağıdaki formülde bu tanım matematiksel olarak ifade edilmiştir

$$C(\text{ölçek, pozisyon}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(\text{ölçek, pozisyon}, t)dt \quad (1)$$

Burada C dalgacık dönüşümünün katsayılarını, ψ da dalgacık fonksiyonu gösterir; dalgacık fonksiyonu ψ kullanılan dalgacık tipine göre değişiklik gösterir. Elde edilen C katsayılarının, dalgacık fonksiyonun uygun ölçek ve pozisyonundaki hali ile toplanmasıyla da f fonksiyonunu geri çatımı elde edilir.

Sayısal analiz veya fonksiyonel analiz çalışmalarında genellikle, yukarıda sürekli hali anlatılan dalgacık dönüşümünün örneklenmiş şekli olan *ayrık dalgacık dönüşümü* kullanılır. Bu bildiride de dalgacık dönüşümü için izlenecek tercih edilecek yöntem ayrık dalgacık dönüşümüdür. Burada analiz edilecek işaret, çeşitli kesim frekansına sahip yüksek ve alçak filtrelerden geçirip, orijinal işaret ile aynı sayıda veriye sahip olması için de örnekleme azaltma uygulanarak dönüşüm gerçekleştirilir (bkz. Şekil 1).



Şekil 1: Ayrık dalgacık dönüşümü

Dalgacık dönüşümünde kullanılabilecek pek çok dalgacık tipi vardır, bunlar arasında Beylkin, BNC, Coiflet-Daubechies-Feauveau, Daubechies, Haar, Mathieu, Legendre, Villasenor, Symlet sayılabilir. Dalgacık dönüşümü kavramını iki boyutlu sinyaller için de tanımlamak mümkündür; bu da yatay, dikey ve diyagonal yönlerdeki tek boyutlu dalgacık dönüşümlerini, bir dalgacık katsayıları matrisinde toplayarak elde edilir.

2.1.2. Navier-Stokes (NS) Denklemleri

Navier-Stokes denklemleri sıvılar ve gazlar gibi akışkanların hareketini tanımlamaya yarayan bir dizi denklemden oluşmaktadır [1]. Bu denklemler verilen bir akışkanın herhangi bir bölgesindeki kuvvetler dengesinin dinamik bir ifadesi olup, akış sırasındaki hız ve basınç değişimlerini belirten ve genel biçimi aşağıdaki gibi olan kısmi türevsel denklemlerdir

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (q \cdot \nabla)q = \nabla p + \nu \Delta q \quad (2)$$

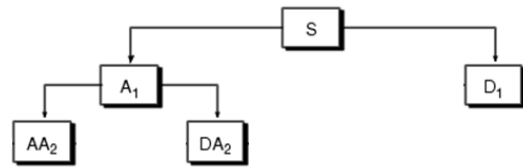
Bu bildiri için akış sıkıştırılmaz kabul edilecektir; bu da yukarıdaki denklemin $\nabla \cdot q = 0$ şartını sağlaması demektir. Burada $\nu \in \mathbb{R}$ parametresi ağırlık (viskozite) değeri, $p(x, y, t) \in \mathbb{R}$ değişkeni basınç ve $q(x, y, t) \in \mathbb{R}^2$ da akış hızını gösterir; burada u yatay ve v dikey bileşendir.

3. Uygulama ve Yöntem

Bölgesel dinamik model elde edilmesine giden yoldaki ilk aşama, (2) ifadesindeki Navier-Stokes denklemleri ile yönetilen akış için belirli zaman anlarında anlık görüntülerin kaydedilmesi ve bunlara dalgacık ayrışımı uygulanmasıdır. Burada dalgacık tipi olarak *Daubechies* dalgacığı seçilecektir. Asimetrik ve gelişigüze yakın bir yapısı olması, dikgen olması, tam geri çatılma gerçekleştirilebilmesi ve sonlu destek alanına sahip olması sebebiyle akış problemlerinde görülen

yapıları yakalama başarımının yüksek olacağı düşünülerek bu dalgacık çeşidi tercih edilecektir. Buna ek olarak, Daubechies dalgacığı için dönüşüm için hızlı yöntemlerin mevcut olması sebebiyle akış deneylerinden elde edilen yüksek sayıda anlık görüntünün kısa sürede işleminden geçirilebilecek olması da bir avantajdır.

Dalgacık ayrışımı sonunda, anlık görüntünün boyutu ile eşit sayıda dalgacık katsayısı elde edilecektir; bunların yarısı yaklaşık, yarısı da detay katsayısı olacaktır (bkz. Şekil 1). Dalgacık dönüşümü işlemini yaklaşık katsayılarına tekrar uygulanarak bu katsayıları da ayrıştırmak ve bu şekilde devam ederek değişik seviyelerde dalgacık dönüşümü elde etmek mümkündür. Örnek olarak Şekil 2'de ikinci seviye ayrık dalgacık dönüşümü gösterilmiştir. Bu işlem sonucunda yaklaşık katsayılarının yarısı detay katsayısına dönüşeceğinden daha az yaklaşık katsayısı ile akış anlık görüntülerini temsil etmek mümkün olacaktır. Bu işlemi daha da devam ettirmek ve yaklaşık katsayılarını tekrar tekrar ayrıştırmak mümkündür. Ancak yaklaşık katsayılarının azalması, her katsayının temsil ettiği bölgesel alanı arttıracığı için modelleme çözünürlüğü düşecektir. Yukarıdaki artılar ve eksiler göz önüne alınarak her problem için duruma uygun bir seviye seçimi yapılması gerekmektedir.



Şekil 2: İkinci seviye ayrık dalgacık dönüşüm

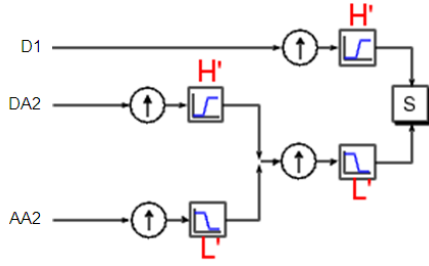
Dalgacık dönüşümünün ardından gelen aşama eşikleme aşamasıdır. Burada ayrışım sonucu elde edilen detay katsayılarına belirli oranda eşikleme işlemi uygulanacaktır. Uygulanan eşikleme işlemi kısaca şu şekilde ifade edilebilir:

$$Y = \begin{cases} X, & |X| > T \text{ ise} \\ 0, & |X| \leq T \text{ ise} \end{cases} \quad (3)$$

Burada X detay katsayısı, Y eşiklenmiş katsayı ve $T \in \mathbb{R}_+$ de eşik değeridir. Yukarıdaki ifade ile gerçekleştirilen işlem, dalgacık katsayısının mutlak değeri seçilen eşik değerinden büyükse bu katsayının sabit tutulması, değilse de katsayının sıfırlanmasıdır. Eşikleme sonucunda dalgacık katsayıları büyük ölçüde sıfırlardan oluşacağı için bu katsayıları bir seyrek matris olarak ifade ederek sıkıştırma ve yer tasarrufu sağlanabilir. Eşikleme ile elde edilen Y katsayılarının, akışın anlık görüntülerini ve dolayısıyla da akışı ne kadar iyi temsil edebildiğini görmek için bu katsayılarla dalgacık geri dönüşüm işlemi uygulanarak orijinal anlık görüntü geri çatılmalıdır. Bahsedilen geri dönüştürme işlemi temelde ayrıştırma işleminin tersidir ve Şekil 3'de görüldüğü gibi örnekleme yükseltme işlemleri ve filtreleme işlemleri uygulanmasından ibarettir.

Sonraki aşama, oluşturulan geri çatılmış sinyalin girişteki sinyalle benzerliğinin ölçülmesidir. İdeal durum, T eşik değerinin sıfıra kadar düşürüldüğü durumda bile kabul

edilebilir bir geri çatılama elde edilebilmesidir. Eğer bu gerçekleşirse, tüm detay katsayılarını atıp sadece az sayıdaki yaklaşık-kalama katsayısını kullanarak akışı temsil etmek mümkün olacaktır.



Şekil 3: İkinci seviye ayrışım için geri çatılama işlemi

Akışın anlık görüntülerinin dalgacık katsayılarından yukarıda anlatılan eşikleme/sıkıştırma işlemi sonucunda detay katsayılarının atılmasının ardından gelen adım bölgesel modelleme için istenilen bölgeyi tasvir edecek $\Phi_i(x, y)$ taban vektörlerinin oluşturulmasıdır. Dalgacık ayrışımı ile elde edilen yaklaşık-kalama katsayılarından her birinin belli bir bölgeyi temsil ettiği hatırlanırsa, $\Phi_i(x, y)$ vektörlerinin oluşturmak için ilgilenilen bölgeyi temsil eden belli sayıda katsayı seçildikten sonra, katsayılar tek tek 1 değeri verilip geri çatılama işlemi yapılmak suretiyle $\Phi_i(x, y)$ taban vektörleri elde edilebilir. Bunun ardından akış hızının yatay yöndeki bileşeni için aşağıdaki gibi bir açılım elde edilebilir

$$u(x, y, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \Phi_i(x, y) \quad (4)$$

Burada $N \in \mathbb{N}$ istenilen bölgeyi temsil eden katsayı sayısı ve $a_i(t)$ de, t anında u yatay hızının dalgacık dönüşümünde i dizininin karşılık geldiği yaklaşık-kalama katsayısının değeridir. Daubechies dalgacığının dikgen özelliğinden dolayı iki farklı taban vektörünün iç çarpımı da sıfır olacaktır, yani $i \neq j$ için

$$(\Phi_i(x, y), \Phi_j(x, y)) = 0 \quad (5)$$

olacaktır. Böyle olunca Φ_i vektörlerine N boyutlu bir alt uzayı oluşturan koordinat eksenleri, a_i katsayılarına da u hızının bu taban vektörleri üzerindeki bileşenleri olarak da bakılabilir.

Bu çıkarımlardan sonraki adım, akış alanının ilgilenilen bölgesindeki akış dinamiğini temsil eden bir model oluşturulmasıdır. Yukarıdaki (4) açılımının sağ tarafına bakılacak olursa zamanla değişimi belirleyen ögenin a_i katsayıları olduğu görülmektedir; Φ_i vektörleri zamana göre sabittir. O halde akışın zamanla değişimini modellemek için a_i katsayıları için bir dinamik model oluşturmak kâfidir. Akışın anlık görüntüleri ayrı zamanlarda elde edildiği için, aşağıdaki gibi ayrı bir dinamik model aranacaktır

$$x(t + T_s) = Ax(t) + B\gamma(t) \quad (6)$$

$$y(t) = Cx(t) + D\gamma(t) \quad (7)$$

Burada $T_s \in \mathbb{R}$ örnekleme zamanı, $x \in \mathbb{R}^n$ durum vektörü, $n \in \mathbb{N}$ sistemin derecesi, $\gamma \in \mathbb{R}$ kontrol girişi ve $y \in \mathbb{R}^N$ de çıkış sinylidir. Dinamik sistemi tanımlayan A, B, C ve D matrisleri, akışın anlık görüntülerinin dalgacık ayrışımı

sonucunda elde edilen yaklaşık-kalama katsayılarına, (6)-(7) denklemlerindeki gibi bir modelin, sistem tanılama yöntemleri ile oturtulmasından elde edilecektir. Sistem tanılama verilerini oluşturmak için değişik girişler altında ve T_s örnekleme zamanı için akışın anlık görüntüleri elde edilecek ve bu anlık görüntülere dalgacık ayrışımı uygulandıktan sonra, ilgilenilen bölgeyi temsil eden N yaklaşık-kalama katsayısı aşağıdaki gibi sistem çıkışı olarak alınacaktır

$$y(t) = a(t) = [a_1(t) \ a_2(t) \ \dots \ a_N(t)]^T \quad (8)$$

Elde edilen giriş-çıkış verilerinden (6)-(7) denklemlerindeki A, B, C ve D matrislerini elde etmek için *alt uzay sistem tanılama (N4SID)* yöntemleri kullanılacaktır. Bu yöntemler, eldeki giriş-çıkış verileri için önce Kalman durumları tabir edilen durum gezinmelerini oluşturduktan sonra, en küçük kareler yöntemi ile bu gezinmelerden A, B, C ve D sistem matrislerini bulma prensibine dayanır. Alt uzay sistem tanılama yöntemleri ile ilgili detaylı bilgiye [18, 19] kaynaklarından ulaşılabilir.

4. Örnek

Bu bölümde, akışkan akışları için bir önceki bölümde anlatılan bölgesel dinamik modelleme yöntemi bir örnek üzerinde gösterilecektir. Bu örnekte iki boyutlu bir karesel alan üzerinde Navier-Stokes denklemleri ile yönetilen ve kontrol girişinin sınır koşulları yoluyla sistemi etkilediği bir akış ele alınacak ve alanın orta bölgesindeki yatay akışın dinamik modellenmesi üzerinde durulacaktır. Bunun için önce (2) ifadesindeki Navier-Stokes denklemlerinin iki boyutlu halini yazalım. Akış hızını $q(x, y, t) = [u(x, y, t) \ v(x, y, t)] \in \mathbb{R}^2$ olarak ifade edelim; burada u yatay ve v dekiy bileşendir. O halde (2) ifadesi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v = \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v = \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (10)$$

biçiminde yazılabilir. Bu örnek için ağırlık değeri $\nu = 0.1$ olarak alınacak ve uzaysal akış alanı da $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ olarak tanımlanacaktır. Akış için ilk koşullar

$$u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0 \quad (11)$$

ve sınır koşulları da

$$u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 1 \quad (12)$$

$$v(x, 0, t) = v(x, 1, t) = 0 \quad (13)$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0, y, t) = 0 \quad (14)$$

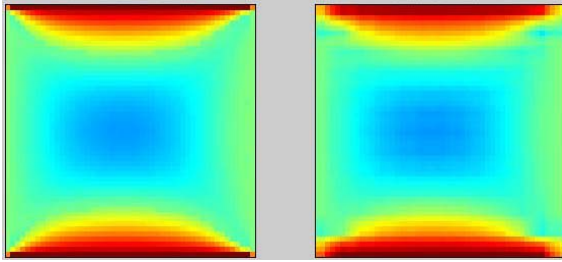
$$u(1, y, t) = \begin{cases} 0, & y \in [0, 0.42] \\ \gamma(t), & y \in [0.42, 0.58] \\ 0, & y \in [0.58, 1] \end{cases} \quad (15)$$

$$v(1, y, t) = 0 \quad (16)$$

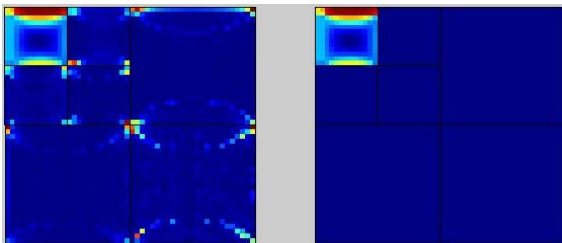
şeklinde; burada $\gamma \in \mathbb{R}$ kontrol girişidir. Bu örnek için modelleme hedefini de, akış alanı Ω 'nın ortası olan (0.5, 0.5) noktasının etrafındaki bir alandaki yatay yöndeki akışı

modelleyecek düşük boyutlu bir dinamik sistem oluşturmak olarak seçelim.

Öncelikle MATLAB *Navier2d* hesaplamalı akışkanlar dinamiği (HAD) çözücüsü [20] ile yukarıdaki Navier-Stokes denklemleri 50×50 'lik bir uzaysal örgü üzerinde $T_s = 0.0014$ saniyelik örnekleme zamanı için çözülmüş ve 1000 eşit zaman aralığında anlık görüntüler kaydedilmiştir. Tüm verileri temsilen toplanan 1000 anlık görüntünün ortalaması alınmış bu ortalama anlık görüntünün iki seviyeli dalgacık ayrışımı yapılmıştır. Dalgacık ayrışımı için MATLAB *Wavelet Toolbox* dahilindeki fonksiyonlardan faydalanılmıştır. Bunun ardından değişik T eşikleme değerleri seçilerek dalgacık katsayılarına eşikleme uygulanmış ve eşik değeri T giderek küçültülmüştür. T değerinin sıfıra ulaştığı durum için orijinal ve geri çatılmış anlık görüntüler Şekil 1'de, orijinal anlık görüntüye dalgacık ayrışımı uygulanması ile elde edilen katsayılar ile, eşikleme işlemi sonucunda detayların sıfırlanması ile elde edilen katsayılar da Şekil 2'de gösterilmiştir. Şekillerden görülmektedir ki $T = 0$ olduğu durumda bile, yani bütün detay katsayıları atılarak sadece yaklaşıkklama katsayıları bırakıldığında bile, kalan katsayılarla elde edilen geri çatılmış anlık görüntü, orijinal görüntüyü kabul edilebilir derecede iyi bir yakınlıkta temsil edebilmektedir. Bu da demektir ki 50×50 'lik anlık görüntülerin dalgacık dönüşümü ile elde edilen 2500 civarı katsayıdan, sadece yaklaşıkklama katsayıları olan 196 tanesi akışı temsil etmek için yeterlidir.



Şekil 4: Orijinal anlık görüntü (sol) ve bu görüntünün sadece yaklaşıkklama katsayıları kullanılarak geri çatılması ile elde edilen görüntü (sağ)

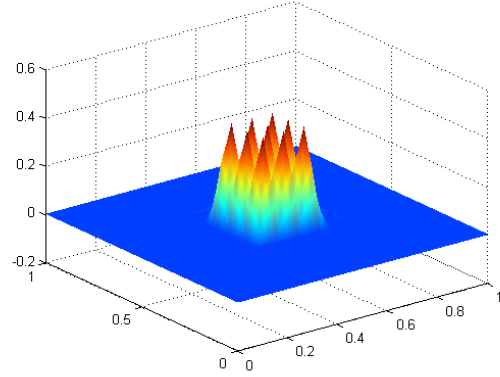


Şekil 5: İki seviye ayrıştırma sonucu dalgacık katsayıları (sol) ve eşikleme sonucu detayların sıfırlanması sonucu oluşan katsayılar (sağ)

Akış verilerinin elde edilmesinden sonraki adım, $\Phi_i(x, y)$ taban vektörlerinin elde edilmesidir. Bunun için önce eldeki örnek için akışın orta bölgesini temsil eden dokuz adet katsayı seçilmiştir. Daha sonra, önceki bölümde anlatıldığı gibi, bu katsayılarla tek tek bir değeri verilerek geri çatılma işlemi yapmak suretiyle $i = 1 \dots 9$ için $\Phi_i(x, y)$ taban vektörleri elde edilmiştir; bu vektörler Şekil 6'da gösterilmiştir. Böylece

akış hızının yatay yöndeki bileşeni için aşağıdaki gibi bir açılım elde edilmesi mümkün olmuştur

$$u(x, y, t) = \sum_{i=1}^9 a_i(t) \Phi_i(x, y) \quad (17)$$



Şekil 6: Akış alanının ortasını temsil eden dokuz yaklaşıkklama katsayısı için oluşturulan $\Phi_i(x, y)$ taban vektörleri ($i = 1 \dots 9$)

Sistem tanılama verilerini oluşturmak için değişik girişler altında ve $T_s = 0.0014$ örnekleme zamanı için akışın anlık görüntüleri elde edilmiş ve bu anlık görüntülere dalgacık ayrışımı uygulandıktan sonra, ilgilenilen bölgeyi temsil eden dokuz yaklaşıkklama katsayısı aşağıdaki gibi sistem çıkışı olarak alınmıştır

$$y(t) = a(t) = [a_1(t) \ a_2(t) \ \dots \ a_9(t)]^T \quad (18)$$

Kullanılan girişler altında sıfır giriş, sabit frekanslı sinüs giriş, değişken frekanslı sinüs giriş ve rampa giriş sayılabilir. Bunlardan ilk üç giriş için elde edilen giriş-çıkış verileri eğitim verileri, rampa giriş için elde edilenler ise test verileri olarak ayrılmıştır. Eğitim verileri kullanılarak (6)-(7) denklemlerindeki A , B , C ve D matrislerini elde etmek için, önceki bölümde de belirttiği gibi, alt uzay sistem tanılama (N4SID) yöntemleri kullanılmış, ve dördüncü dereceden bir model aranmıştır. Bu çalışmada bu teknikler MATLAB *System Identification Toolbox* altındaki fonksiyonlar yardımıyla gerçekleştirilmiş olup, elde edilen sistem matrisleri aşağıdaki gibidir

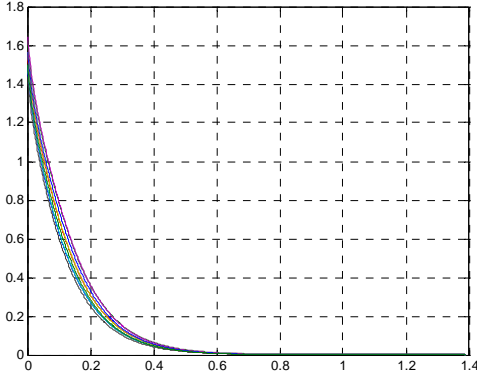
$$A = \begin{bmatrix} -0.0338 & -0.0436 & 0.0248 & -0.1375 \\ -0.0331 & 0.9786 & 0.0025 & -0.0093 \\ 0.0145 & 0.0041 & 0.9803 & 0.0011 \\ -0.1345 & -0.0169 & 0.0029 & 0.9568 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.8613 \\ -0.0451 \\ 0.0105 \\ -0.1632 \end{bmatrix} \quad (20)$$

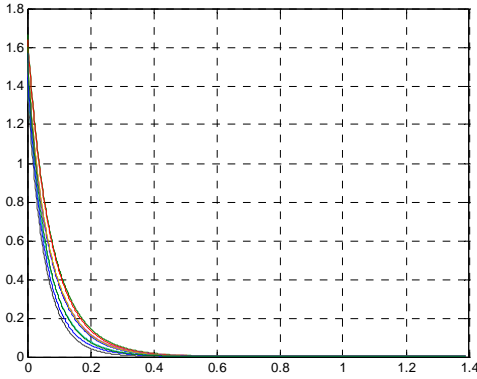
$$C = \begin{bmatrix} 0.0434 & 0.6996 & -0.4543 & -0.5784 \\ 0.0724 & 0.8890 & 0.0796 & -0.7087 \\ 0.0527 & 0.9038 & -0.2603 & -0.6748 \\ 0.0787 & 0.3617 & -0.4394 & -0.5465 \\ 0.0863 & 0.5739 & 0.0886 & -0.6437 \\ 0.0607 & 0.6771 & -0.2634 & -0.6162 \\ 0.0925 & -0.1119 & -0.4506 & -0.5407 \\ 0.1423 & -0.1612 & 0.0936 & -0.6269 \\ 0.1130 & 0.1420 & -0.2734 & -0.6211 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$D = 0^{9 \times 1} \quad (22)$$

Burada $0^{9 \times 1}$, sıfırlardan oluşan 9×1 'lik bir matrisi gösterir. Sıfır giriş ($\gamma = 0$) durumu için NS denklemlerinin HAD benzetimlerinden elde edilen anlık görüntülerin dalgacık ayrışımının katsayılarında seçilen dokuz a_i katsayısının dinamiği Şekil 7'de, sistem tanılama ile elde edilmiş (19)-(22) matrislerinin oluşturduğu (6)-(7) sisteminin çıktısı da Şekil 8'de gösterilmiştir.



Şekil 7: Seçilen dokuz a_i yaklaşılama katsayısının sıfır giriş altında NS denklemlerinin HAD benzetimlerinden elde edilen dinamiği.

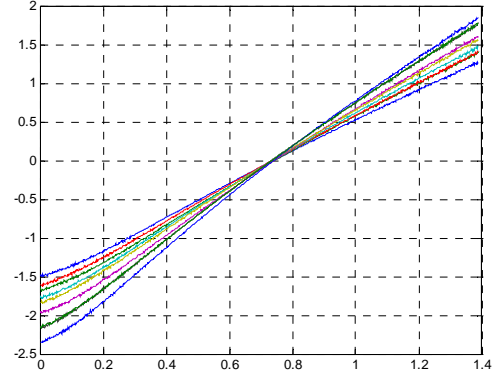


Şekil 8: Sistem tanılama ile oluşturulan dinamik modelin sıfır giriş altındaki çıktısı

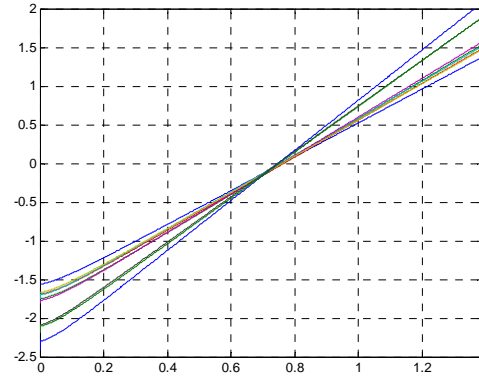
Not: İlgilenilen bölgeyi temsil eden dokuz tane a_i katsayısı olmasına karşın, düşük boyutlu dinamik modelin sadece dört

durumu olduğu için, x durumunun $x(0) = x_0$ ilk koşulunu, verilen herhangi bir dokuz boyutlu $y(0) = a(0)$ çıkışı sağlayacak şekilde seçmek genelde mümkün değildir. Bu nedenle benzetimlerde x_0 seçimi, düşük boyutlu (6)-(7) sisteminin x_0 durumu için çıktısının, NS denklemlerinin HAD benzetimlerinden elde edilen sonuçların ilk değerine mümkün olduğunca yakın olmasına dikkat edilerek yapılmıştır.

Şekil 7 ve Şekil 8'e bakıldığında, iki sistem gezinmeleri birebir örtüşmese de ve sürekli hale ulaşma zamanları arasında ufak farklar olsa bile, oluşturulan dördüncü dereceden dinamik modelin, HAD benzetimlerinden elde edilenlere kabul edilebilir derecede yakın sonuçlar ürettiği gözlemlenmektedir. İkinci bir benzetim olarak, -2'den 2'ye değişen bir rampa giriş fonksiyonu sisteme verilmiştir. Az önce de belirtildiği gibi, bu giriş bir test verisi olup eğitim verisi değildir, yani bu giriş için elde edilen giriş-çıkış verileri sistem tanılama için kullanılmamıştır. Bu rampa giriş için NS denklemlerinin HAD benzetimlerinden elde edilen anlık görüntülerin dalgacık ayrışımının katsayılarında seçilen dokuz a_i katsayısının dinamiği Şekil 9'da, sistem tanılama ile elde edilmiş (17)-(20) matrislerinin oluşturduğu (6)-(7) sisteminin çıktısı da Şekil 10'da gösterilmiştir.



Şekil 9: Seçilen dokuz a_i yaklaşılama katsayısının rampa giriş altında NS denklemlerinin HAD benzetimlerinden elde edilen dinamiği.



Şekil 10: Sistem tanılama ile oluşturulan dinamik modelin rampa giriş altındaki çıktısı

İki şekle bakıldığında, yine önceki durumda olduğu gibi gezinmeler birbir örtüşmese de, sistem tanımlama ile elde edilen düşük seviyeli modelin, NS denklemlerinin HAD benzetimlerinden elde edilen dalgacık katsayılarının rampa giriş altındaki davranışını nitel ve nicel olarak kabul edilebilir yakınlıkta temsil edebildiği görülmektedir. Rampa girişinin eğitim verileri arasında yer almadığı hatırlanacak olursa bu sonuçlardan, (6)-(7) ifadelerindeki gibi bir sistemin, değişik girişler altında $\Omega = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ karesel alanı üzerinde (9)-(10) NS denklemleri ile yönetilen, (11) ilk koşulları ve (12)-(16) sınır koşullarına tabi bir akışın bölgesel dinamiğini temsil etmede başarılı olduğu çıkarımına ulaşılabılır.

5. Sonuçlar, Tartışmalar ve Gelecekteki Çalışmalar

Bu bildiriye dalgacık dönüşümü ile akış problemlerinin bölgesel dinamik modellemesi irdelenmiştir. İlk önce akışı temsil eden NS denklemlerinin HAD benzetimlerinden anlık görüntüler elde edilmiştir. Dalgacık dönüşümü, eşikleme ve geri çatılma ile bu anlık görüntülerin, dalgacık katsayılarından yalnızca yaklaşık katsayıları kullanılarak yeterli derecede iyi temsil edilebildiği görülmüştür. Bunun ardından akışın ilgililenen bölgesini temsil eden dalgacık katsayıları kullanılarak taban vektörleri oluşturulmuş ve akışın bu taban vektörleri cinsinden açılımı elde edilmiştir. Taban vektörü katsayıların zamana bağlı değişimi elde edildikten sonra alt uzay tanımlama yöntemleri ile bu değişimi temsil eden düşük boyutlu bir dinamik sistem modeli oluşturulmuştur. Geliştirilen yaklaşımlar karesel bir alan üzerinde Navier-Stokes denklemleri ile yönetilen ve girişin sınır koşullarından sistemi etkilediği bir akış örneğine uygulanmış ve başarılı sonuçlar verdiği görülmüştür. Bildiriye sunulan teknikler, akış problemleri için düşük boyutlu bölgesel dinamik modeller oluşturulması için sistematik bir yöntem sunması bakımından önemlidir. Literatürde akış problemlerinin modellenmesinde en sık kullanılan standart yöntemler olan UDA/Gİ metotları da düşük boyutlu modeller vermektedir; ancak bu modeller doğrusal olmadığından üzerlerinde analiz ve kontrol tasarımı yapmak çok zordur. UDA/Gİ modelleri ilgili bir başka sıkıntı da UDA kiplerinin destek alanının akış alanının tamamına yayılması sebebiyle akışın sadece bir bölgesini ilgilendiren bölgesel modelleme ve analizler yapılmak istendiğinde sıkıntı yaşanmasıdır. Bildiriye geliştirilen teknikler, standart UDA/Gİ modelleme metotları ile ilgili bu sıkıntılara çözüm getirerek akış problemleri için düşük boyutlu doğrusal ve bölgesel dinamik modeller oluşturulması gereken durumlarda fayda sağlayacaktır. Gelecekteki çalışmalar arasında, değişik dalgacık türleri kullanılarak modellemeler yapılması ve karşılaştırılması ile, önerilen tekniklerin farklı akış problemlerine uygulanması sayılabilir.

6. Kaynakça

[1] M. Gad-el Hak, *Flow Control - Passive, Active, and Reactive Flow Management*. New York, NY: Cambridge University Press, 2000.
 [2] T. Bewley, "Flow control: new challenges for a new Renaissance," *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 37, no. 1, pp. 21–58, 2001.

[3] P. Holmes, J. Lumley, and G. Berkooz, *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical System, and Symmetry*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
 [4] L. Sirovich, "Turbulence and the dynamics of coherent structures," *Quarterly of Applied Math.*, vol. XLV, no. 3, pp. 561–590, 1987.
 [5] B. R. Noack and H. Eckelmann, "A global stability analysis of the steady and periodic cylinder wake," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 270, pp. 297–330, 1994.
 [6] B. R. Noack, K. Afanasiev, M. Morzynski, G. Tadmor, and F. Thiele, "A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 497, pp. 335–63, 2003.
 [7] B. R. Noack, P. Papas, and P. A. Monkewitz, "The need for a pressure-term representation in empirical Galerkin models of incompressible shear flows," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 523, pp. 339–65, 2005.
 [8] C. W. Rowley, T. Colonius, and R. M. Murray, "Model reduction for compressible flows using POD and Galerkin projection," *Physica D*, vol. 189, no. 1-2, pp. 115–29, 2004.
 [9] C. W. Rowley and J. E. Marsden, "Reconstruction equations and the karhunen-loeve expansion for systems with symmetry," *Physica D*, vol. 142, no. 1-2, pp. 1–19, 2000.
 [10] K. Fitzpatrick, Y. Feng, R. Lind, A. J. Kurdila, and D. W. Mikolaitis, "Flow control in a driven cavity incorporating excitation phase differential," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 28, no. 1, pp. 63–70, 2005.
 [11] M. Samimy, M. Debiasi, E. Caraballo, A. Serrani, X. Yuan, J. Little, and J. H. Myatt, "Feedback control of subsonic cavity flows using reduced-order models," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 579, pp. 315–346, 2007.
 [12] E. Caraballo, J. Little, M. Debiasi, and M. Samimy, "Development and implementation of an experimental based reduced-order model for feedback control of subsonic cavity flows," *Journal of Fluids Engineering*, vol. 129, pp. 813–824, 2007.
 [13] S. N. Singh, J. H. Myatt, G. A. Addington, S. Banda, and J. K. Hall, "Optimal feedback control of vortex shedding using proper orthogonal decomposition models," *Transactions of the ASME. Journal of Fluids Engineering*, vol. 123, no. 3, pp. 612–618, 2001.
 [14] I. Daubechies and B. Bates, "Ten Lectures on Wavelets," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 93, p. 1671, 1993.
 [15] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1999.
 [16] C. Chui, *An Introduction to Wavelets*. Academic Press, 1992.
 [17] G. Strang and T. Nguyen, *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley Cambridge Pr, 1996.
 [18] P. Van Overschee and B. De Moor, *Subspace Identification for Linear Systems: Theory, implementation, applications*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
 [19] W. Larimore, "Statistical optimality and canonical variate analysis system identification," *Signal Processing*, vol. 52, no. 2, pp. 131–144, 1996.
 [20] D. Engwirda, "An unstructured mesh navier-stokes solver," Master's thesis, School of Engineering, University of Sydney, 2005.