

Doğrusal Olmayan Basit Osilatör Modelleri ile Akış Problemlerinin Frekans Kısıtlı Kontrolü

Coşku Kasnakoğlu

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

kasnakoğlu@etu.edu.tr

Özetçe

Bu bildiriye doğrusal olmayan basit osilatör modelleri ile temsil edilebilen akış problemleri için salınım genliğini azaltırken aynı zamanda salınım frekansını daima istenilen aralıkta tutacak bir kontrol yaklaşımı incelenmiştir. Önce bu kontrol hedeflerini gerçekleştirecek kontrol parametre aralıkları teorik olarak elde edilmiştir. Ardından gerçek hayatta sıkça görülen ve önem taşıyan bir akış kontrolü problemi olan bir kovuk üzerinden geçen hava akışının kontrolü problemi ele alınmış ve önceki bölümlerde elde edilen kontrol tasarım teknikleri ile istenilen kontrol hedeflerinin gerçekleştirilebildiği benzetimlerle gösterilmiştir.

1. Giriş

Sıvı ve gaz akışları insan hayatının ayrılmaz bir parçası olup, günlük hayatta bu akışlara sayısız örnek bulabilir. Örneğin hava/kara/deniz taşıtları etrafındaki hava/su akışı, atmosferdeki bulut hareketleri, boru hatlarındaki petrol akışı hep bu türden akışlardır. Akışkan akışlarının denetim altına alınabilmeleri oldukça faydalı ama bir o kadar da zor bir konu olup, pek çok farklı alandan çok sayıda araştırmacı ve mühendisin ilgisini çekmektedir [1, 2]. Bu alandaki sayısız bilimsel çalışma arasında kaba cisimler üzerindeki akışın kararlaştırılması [3], silindir etrafı akımların kontrolü [4, 5], ve kovuk akışı kontrolü [6, 7] sayılabilir.

Bu bildiriye, doğal salınıma sahip olan ve bu salınımın daima belli frekanslar arasında tutulması istenen akış problemlerinin kontrolü üzerinde durulacaktır. Bu çalışmanın motivasyonu ve ana fikri büyük ölçüde kovuk akışları ve özellikle de onların akustik uyarıcılarla kontrolünden çıkmıştır [7, 8]. Bu sistemlerin karakteristik özelliği kendi kendini sürdürebilen bir salınımın varlığı olduğundan, bu sistemleri temsil edebilecek basit osilatör modelleri oluşturulması ve bunlar üzerinde kontrol tasarımı yapılması doğal bir fikir olarak kendini göstermektedir. Doğrusal olmayan osilatörler ve genel olarak osilatör modelleri ile ilgili pek çok kaynak ve çalışma olmakla beraber (örneğin [9–11]), bu bildiri ile en çok ilgili olan çalışmalar, doğrusal olmayan basit osilatör modelleri ile kovuk akışları [12] ve silindir etrafı akışlar [13, 14] üzerinde gerçekleştirilen analiz ve tasarım çalışmalarıdır. Doğrusal olmayan basit osilatör modelleri, salınım içeren akışların pek çok karakteristik özelliğini barındıran düşük boyutlu modeller sunmaları bakımından yüksek değere sahiptir. Bu bildiriye önce, bu

modeller ve üzerinde çalışılacak kontrol yasaları matematiksel olarak tanımlanacak ve ulaşılmak istenen kontrol hedefleri belirlenecektir (Bölüm 2). Bu hedefler, salınım genliğini sifıra indirirken aynı zamanda salınım frekansını belli sınırlar arasında tutmaktır. Bu hedeflerin gerçekleştirilmesi için kontrol parametrelerinin seçimi Bölüm 3'te tartışılacaktır. Bildiriye geliştirilen yöntemler Bölüm 4'te bu çalışmanın motivasyonlarından olan kovuk akışı problemine uygulanacak ve benzetim sonuçları sunulacaktır. Bölüm 5'teki sonuçlar ve gelecekteki çalışmalar ile bildiri sonlandırılacaktır.

2. Problemin Tanımı

Bu bildiriye, sıfır giriş altında kararlı bir limit döngüsü olan basit osilatör modelleri ile temsil edilebilen akış problemlerinin frekans kısıtlı kontrolü irdelenecektir. İncelenen sistemlerin genel biçimi aşağıdaki gibidir

$$\dot{a} = L(r)a + b\gamma. \quad (1)$$

Burada

$$L(r) = \begin{bmatrix} \sigma - \alpha r^n & -\omega \\ \omega & \sigma - \alpha r^n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$a \in \mathbb{R}^2$, $r = \|a\|$, $\theta = \angle a$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\omega \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $b_1 \in \mathbb{R}$, $b_2 \in \mathbb{R}$ olup, $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ skaler bir kontrol girişidir. Sistem (1), kutupsal koordinatlarda aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \sigma r - \alpha r^n + (b_1 \cos(\theta) + b_2 \sin(\theta))\gamma \\ \dot{\theta} &= \omega + \frac{1}{r}(b_2 \cos(\theta) - b_1 \sin(\theta))\gamma. \end{aligned} \quad (3)$$

Bu makalede *doğrusal olmayan basit osilatör modeli* dediği zaman (1) denklemindeki biçimdeki bir sistem veya onun kutupsal biçimi olan (3) ifadesindeki gibi bir sistem anlaşılacaktır. Sıfır giriş altında (3) sisteminin genliği $r = (\sigma/\alpha)^{1/n}$ olan ve frekansı ω olan kararlı bir limit çevrimi olduğu açıktır.¹ Bu makalede $\gamma = Ka$ şeklinde ifade edilen bir kontrol yasası tasarımı üzerinde durulacaktır; burada $K := [K_1 \ K_2]^T$ şeklindedir. Bu kontrol yasası

$$\begin{aligned} \gamma &= Ka = K_1 a_1 + K_2 a_2 \\ &= K_1 r \cos(\theta) + K_2 r \sin(\theta) \end{aligned} \quad (4)$$

¹Tam doğru isimlendirme kullanılmak istenirse θ' 'ya açısal frekans, $\dot{\theta}/(2\pi)$ 'ye frekans demek gereklidir; ancak bu bildiriye frekans dediği zaman aksi belirtilmedikçe θ anlaşılacaktır.

şeklinde de ifade edilebilir. $A := \|K\|$ ve $\phi := \angle K$ olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned}\gamma &= A \cos(\phi) r \cos(\theta) + A \sin(\phi) r \sin(\theta) \\ &= Ar(\cos(\phi)r \cos(\theta) + \sin(\phi)r \sin(\theta)) = Ar \cos(\theta - \phi).\end{aligned}\quad (5)$$

denklemleri yazılabilir. Bunları (3) ifadesinde yerine koyarsak

$$\begin{aligned}\dot{r} &= (\sigma + A(\cos(\theta) b_1 + \sin(\theta) b_2) \times \\ &\quad (\cos(\phi) \cos(\theta) + \sin(\phi) \sin(\theta))) r - \alpha r^n \\ \dot{\theta} &= \omega + A(\cos(\theta) b_2 - \sin(\theta) b_1) \times \\ &\quad (\cos(\phi) \cos(\theta) + \sin(\phi) \sin(\theta)).\end{aligned}\quad (6)$$

Burada amaç A ve ϕ parametreleri uygun biçimde seçerek aşağıdaki iki kriteri sağlamaktır:

Kriter 2.1 (Frekans kriteri). *Salınım frekansı daima belirli sınırlar arasında kalmalıdır, yani, $0 < \omega_{\text{alt}} < \omega < \omega_{\text{üst}}$ olacak şekilde ω_{alt} ve $\omega_{\text{üst}}$ değerleri verilirse, bütün $t > 0$ anları için $\omega_{\text{alt}} < \dot{\theta} < \omega_{\text{üst}}$ olmalıdır.*

Kriter 2.2 (Genlik kriteri). *Salınım genliği zamanla sifira gitmelidir, yani $t \rightarrow \infty$ için $r \rightarrow 0$ olmalıdır.*

Yukarıdaki (3) denklemleri düşük boyutlu olmalarına rağmen, kendi kendini sürdüren salınımların pek çok önemli genel özelliğini içermeleri ve kontrol tasarımı için özgün zorluklar ortaya çıkarmaları bakımından incelemeye değerdir. Takip eden bölümde, Kriter 2.1 ve Kriter 2.2'yi sağlayacak şekilde bir kontrol tasarımı elde edilmesi için A ve ϕ parametrelerinin seçimi ile ilgili kurallar verilecektir.

3. Analiz ve Kontrol Tasarımı

3.1. Frekans Kriteri için Sağlanması Gereken Şartlar

Frekans kriteri (Kriter 2.1) için sağlanması gereken şartlar aşağıdaki savda özetlenmiştir.

Sav 3.1 (Frekans şartı). *Yukarıda (3) ifadesinde verilen basit osilatör modelini ele alalım. $\omega_{\text{alt}} \in \mathbb{R}_+$ ve $\omega_{\text{üst}} \in \mathbb{R}_+$ istenilen frekans aralığının üst ve alt sınırları olsun; burada $0 < \omega_{\text{alt}} < \omega < \omega_{\text{üst}}$ şeklindedir. $\gamma = A^* r \cos(\theta - \phi^*)$ biçiminde bir kontrol yasasının*

$$\omega_{\text{alt}} < \dot{\theta} < \omega_{\text{üst}} \quad \forall t > 0 \quad (7)$$

eşitsizliğini gerçekleştirmesi için (ϕ^, A^*) parametrelerinin $\mathcal{S}_f \subset \mathbb{R}^2$ kümesinin içinde yer alması yeterlidir. Burada*

$$\mathcal{S}_f := \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \quad (8)$$

olup

$$\mathcal{S}_1 := \{(\phi, A) : A_1(\phi) < A < A_2(\phi)\} \quad (9)$$

$$\mathcal{S}_2 := \{(\phi, A) : A'_1(\phi) < A < A'_2(\phi)\} \quad (10)$$

ve

$$A_1(\phi) = \frac{2(\omega - \omega_{\text{alt}})(b_2 \cos(\phi) - b_1 \sin(\phi) - \sqrt{b_2^2 + b_1^2})}{(b_1 \cos(\phi) + b_2 \sin(\phi))^2} \quad (11)$$

$$A_2(\phi) = \frac{2(\omega - \omega_{\text{alt}})(b_2 \cos(\phi) - b_1 \sin(\phi) + \sqrt{b_2^2 + b_1^2})}{(b_1 \cos(\phi) + b_2 \sin(\phi))^2} \quad (12)$$

$$A'_1(\phi) = \frac{2(\omega - \omega_{\text{üst}})(b_2 \cos(\phi) - b_1 \sin(\phi) + \sqrt{b_2^2 + b_1^2})}{(b_1 \cos(\phi) + b_2 \sin(\phi))^2} \quad (13)$$

$$A'_2(\phi) = \frac{2(\omega - \omega_{\text{üst}})(b_2 \cos(\phi) - b_1 \sin(\phi) - \sqrt{b_2^2 + b_1^2})}{(b_1 \cos(\phi) + b_2 \sin(\phi))^2} \quad (14)$$

şeklindedir.

İspat. Bkz. Ek A. □

3.2. Genlik Kriterinin Sağlanması İçin Gerekli Şartlar

Genlik kriteri (Kriter 2.2) için sağlanması gereken şartlar aşağıdaki savda özetlenmiştir.

Sav 3.2 (Genlik şartı). *Yukarıda (3) ifadesinde verilen basit osilatör modelini ve $\gamma = A^* r \cos(\theta - \phi^*)$ şeklinde bir kontrol yasasını ele alalım. Burada $(\phi^*, A^*) \in \mathcal{S}_f$ olup \mathcal{S}_f de (8) ifadesindeki gibidir. Bu kontrolün*

$$t \rightarrow \infty \text{ için } r \rightarrow 0 \quad (15)$$

şartını sağlaması için

$$(\phi^*, A^*) \in \mathcal{S}_m \quad (16)$$

olması yeterlidir. Burada

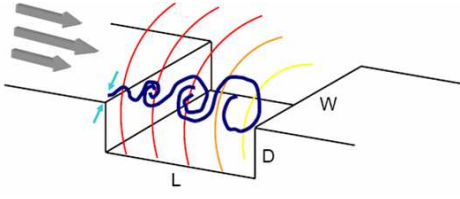
$$\mathcal{S}_m := \{(\phi, A) : 1/2 Ab_1 \cos(\phi) + \sigma + 1/2 Ab_2 \sin(\phi) < 0\} \quad (17)$$

şeklindedir.

İspat. Bkz. Ek B. □

4. Uygulama Örneği: Kovuk Akışı Kontrolü

Bu bölümde, önceki bölümlerde elde edilen sonuçların fiziksel bir örneğe uygulamasını göstermek amacı ile bir kovuk akışı problemi üzerinde durulacaktır [7, 8]. Kovuk akışının karakteristik özelliği, sıkı bir kovuk üzerinden geçen hava akışının yol açtığı doğal bir geri besleme mekanizmasının kendi kendini sürdürebilen bir rezonans oluşturmasıdır. Bu rezonansın yol açtığı akustik dalgalanmalar yüksek şiddetlere ulaşabilmekte ve hava taşıtlarında yük hasarı ve yapısal yorulmalara sebep olabilmektedir. Bu dalgalanmaları bastırmak için



Şekil 1: Art kenara konulan akustik uyarıcı ile kovuk üzeri hava akışının kontrolü

sık kullanılan yöntemlerden biri, hız/basınç ölçümleri ile senetik jet benzeri akustik uyarıcılar yoluyla geribesleme kontrolü uygulamaktır [7]. Bu işlem Şekil 1'de şematik olarak gösterilmiştir. Önce kovuk akışı sürecini tasvir edecek, nispeten yüksek boyutlu bir Galerkin modeli edilecektir; bu model kontrol edilmek istenen sistemi temsil edecektir. Bu modelin, (1) ifadesindeki gibi bir doğrusal olmayan basit osilatör modeli ile nasıl temsil edilebileceği ve Bölüm 3'de elde edilen sonuçlar kullanılacak nasıl kontrol tasarımı yapılabileceği incelenecektir. Kovuk akışını temsil eden Navier-Stokes kısmi türevsel denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Burada kontrol girişi γ sınır koşulları içinde gömülü durumda olup, açıkça görülememektedir. Yukarıda $\mathbf{u}(x, t)$ akış hızını, p basıncı ve Re de Reynolds sayısını gösterir. Önce uygun dikgen ayrışım (UDA) kullanılarak sistemi temsil eden taban kipleri elde edilir, bu kiplere $\{u_i(x)\}_{i=0}^N$ diyelim. UDA kipleri birimdir, yani $(u_i, u_j)_\Omega = \delta_{ij}$ olmaktadır; burada Ω uzaysal akış alanı olup, bu alan üzerinde iç çarpım da $(u, v) := \int_\Omega u \cdot v dV$ biçiminde tanımlıdır. \mathbf{u} hız vektörünün bu kipler üzerine izdüşümü alınır aşağıdaki UDA açılımı elde edilir:

$$\mathbf{u}(x, t) \approx u^{[N]} = u_0(x) + \sum_{i=1}^N a_i(t) u_i(x) \quad (19)$$

Yukarıdaki $a_i(t)$ katsayılarına UDA katsayıları denir ve bunlar akışın zamansal bağımlılığın gösterir. Sonraki adım Galerkin izdüşümü (Gİ) olup, (19) denklemi (18) denkleminde yerine konarak $\{a_i(t)\}_{i=0}^N$ katsayılarının dinamik değişimi elde edilir. Buna ilaveten (18) denklemleri içinde gömülü durumda bulunan kontrol girişi de giriş ayırma teknikleri (örneğin [15]) kullanılarak açık hale getirilir. Son adım, sistemin denge noktası a_s ile kaydırılarak, yani $\tilde{a} = a - a_s$ biçiminde bir dönüşüm yapılarak

$$\dot{\tilde{a}}_i = \sum_{j=1}^N \tilde{l}_{ij} \tilde{a}_j + \sum_{j,k=1}^N \tilde{q}_{ijk} \tilde{a}_j \tilde{a}_k + \left(\tilde{r}_i + \sum_{j=0}^N \tilde{s}_{ij} \tilde{a}_j \right) \gamma \quad (20)$$

biçimine getirilmesidir. Burada \tilde{l}_{ij} , \tilde{q}_{ijk} , \tilde{r}_i ve \tilde{s}_{ij} Galerkin sistemi katsayılarıdır. Sistem (20) derli toplu olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$\dot{\tilde{a}} = L\tilde{a} + Q(\tilde{a}) + (R + S\tilde{a})\gamma. \quad (21)$$

Burada $a = \{a_i\}_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $L = \{l_{ij}\}_{i,j=1}^N \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $Q(a) = \{a^T Q_i a\}_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$, $Q_i = \{q_{ijk}\}_{j,k=1}^N \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $R = \{r_i\}_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ ve $S = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ olup, yazımı basitleştirmek için değişkenlerin üzerindeki \sim işaretleri kaldırılmıştır. Benzetimlerdeki parametreler için, [7] kaynağındaki kovuk akışı deney düzeneğindeki değerler kullanılmıştır. Galerkin sisteminin kovuk üzerindeki akışı yeterince doğru modellemesini sağlamak için akış enerjisinin büyük bir bölümünü içermesi gereklidir. Bu sebeple, istenilen düzeyde bir doğruluk sağlamak için sistem derecesinin $N = 20$ civarında alınması gerekmektedir. Ancak bunun sonucunda yirminci dereceden bir dinamik sistem ortaya çıkmaktadır ve bu kadar yüksek dereceki doğrusal olmayan bir sistem üzerinde analiz ve kontrol tasarımı gerçekleştirmek çok zordur. Bu nedenle bu bölümdeki örnekte, sistemin en yüksek enerjili iki kipi alınarak, bu iki kipi hareketini tasvir eden bir doğrusal olmayan basit osilatör modeli oluşturulduktan sonra, Bölüm 3'de anlatılan tekniklerle analiz ve kontrol tasarımı yapılacaktır. Bu amaçla önce, yeterince zengin bir uyarım altında (21) sisteminin verdiği cevaplar $t_k := k\Delta t$ ile gösterilen M zaman noktasında örneklendirilmiştir. Burada $k \in \mathbb{Z}$ olup $\Delta t \in \mathbb{R}_+$ örnekleme zamanıdır. Anlık değerlerini $\gamma_k = \gamma(t_k)$, tüm giriş değerlerinin kümesini $\{\gamma_k\}_{k=1}^M$, Galerkin katsayılarının değerlerinin kümesini de $\{\tilde{a}_k\}_{k=1}^M$ olarak gösterelim; burada $\tilde{a}_k = [a_1(t_k) a_2(t_k)]^T$ şeklindedir. $\mathcal{Y}(P, \gamma, t)$ ile doğrusal olmayan basit osilatör modeli (1)'nin t anında, γ girişi altında ve $P := (\sigma, \alpha, \omega, b_1, b_2, n) \in \mathbb{P}$ parametreleri için cevabını gösterelim; burada $\mathbb{P} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_{\geq 2}$ olarak tanımlıdır. doğrusal olmayan basit osilatör modelinin t_k anındaki cevabına $\hat{a}_{P,k} := \mathcal{Y}(P, \gamma, t_k)$ diyelim. Galerkin sistemi cevabı ile doğrusal olmayan basit osilatör modelinin cevabı arasındaki ortama farkı gösteren

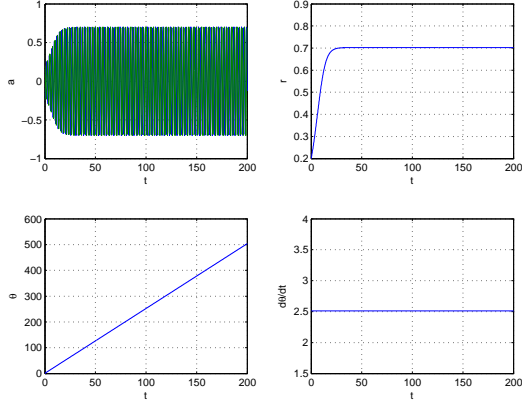
$$J(P) = E[\|\tilde{a}_k - \hat{a}_{P,k}\|]$$

hata fonksiyonunu tanımlayalım. Burada E doğrusal ortalama operatörüdür. Bundan sonra aşağıdaki enküçültme problemini tanımlarsak

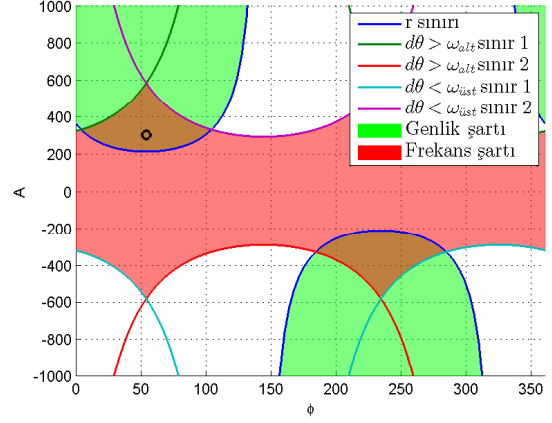
$$P^* = \arg \min_{P \in \mathbb{P}} J(P) \quad (22)$$

bu problemin çözümü, doğrusal olmayan basit osilatör modelinin cevabını ortalama Galerkin sistemi cevabına en yakın yapan P değerlerini verecektir. Eldeki kovuk akış sistemi için yukarıdaki problem MATLAB Optimization Toolbox ile çözüldüğünde parametre değerleri $P^* = (0.1368, 0.2790, 2.5133, -7.6412 \times 10^{-4}, -1.1000 \times 10^{-4}, 3)$ olarak bulunmuştur. Doğrusal olmayan basit osilatör modelinin bu parametre değerleri için zorlanmamış cevabı Şekil 2'de, yüksek dereceli Galerkin modelinin zorlanmamış cevabı da Şekil 3'te gösterilmiştir.² Ek kiplerin varlığından dolayı Galerkin sisteminin cevabının doğrusal olmayan basit osilatör modeline göre daha karmaşık ve pürüzlü olması doğaldır. Buna rağmen, doğrusal olmayan basit osilatör modelinin, yükselme zamanı, salınım genliği, salınım frekansı gibi temel özellikleri kabul edilebilir yakınlıkta temsil edebildiği görülmektedir. Kontrol tasarımı için frekans sınırları $\omega_{alt} = 2.14$ ve $\omega_{üst} = 2.89$ olarak belirlenmiştir; bu sınırlar

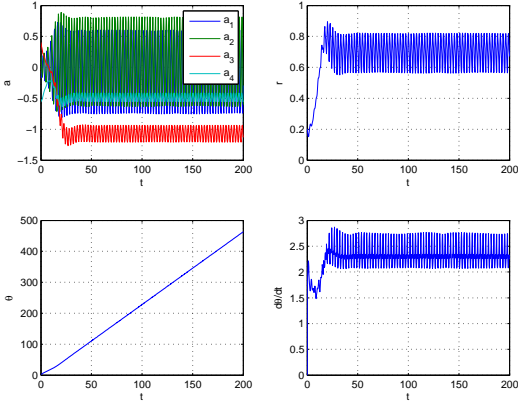
²Şekil 3'te Galerkin sisteminin sadece ilk dört kipi gösterilmiştir çünkü yirmi kipi hepsinin göstermek şekli çok karışık hale getirecektir.



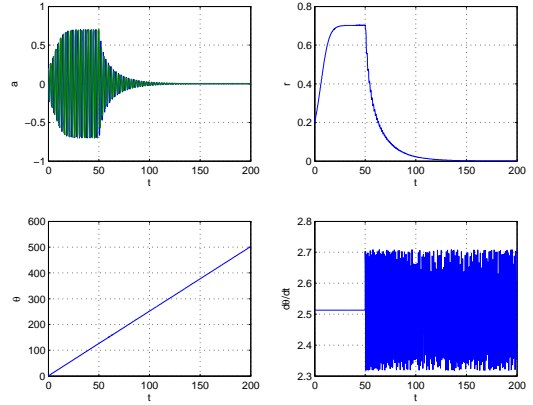
Şekil 2: Doğrusal olmayan basit osilatör modeli için zorlanmamış cevap



Şekil 4: Kontrol parametreleri A ve ϕ 'ye bağlı olarak frekans ve genlik şartları

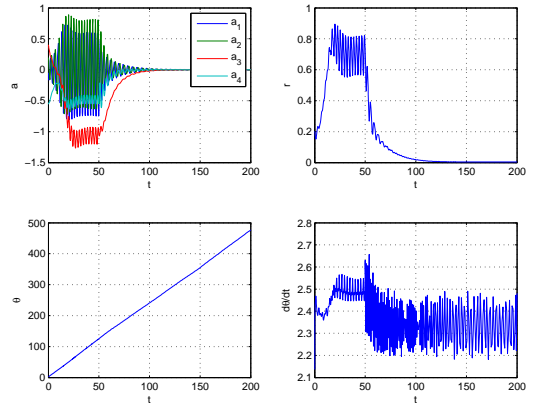


Şekil 3: Yüksek dereceli Galerkin modeli için zorlanmamış cevap



Şekil 5: Doğrusal basit osilatör modeli için kapalı döngü cevabı

kovuk akış deney düzeneğinden elde edilen veriler ve uyarıcının üretebildiği frekans sınırları göze önüne alınarak seçilmiştir. Kovuk akışını temsil eden doğrusal olmayan basit osilatör modeli için, (ϕ, A) düzleminde Sav 3.1'deki frekans şartını ve Sav 3.2'deki genlik şartını temsil eden eğriler Şekil 4'te gösterilmiştir. Şekilde kırmızı bölge frekans kriterin, yeşil bölge de genlik kriterinin sağlandığı bölgeyi göstermektedir. Aranılan kontrol parametreleri kriterlerin ikisini de sağlayan değerler olup, şekilde iki bölgenin kesişimi olan kahverengi bölgede yer almaktadır. Şekilde ufak bir çember ile gösterilen $(\phi, A) = (54^\circ, 300)$ noktası bu bölgede yer aldığından bu değerler kullanılarak $\gamma = 300r \cos(\theta - 54\pi/180)$ biçiminde bir kontrol gerçekleştirilebilir. Basit osilatör modelinin kapalı döngü cevabı Şekil 5'te, yüksek dereceli Galerkin modelinin kapalı döngü cevabı da Şekil 6'da gösterilmiştir; burada kontrol etkisi $t = 50$ s anında devreye sokulmuştur. Basit doğrusal osilatör modeli üzerinde tasarlanan ve yüksek dereceli Galerkin modeline uygulanan kontrolün, istenildiği gibi $r \rightarrow 0$



Şekil 6: Yüksek dereceli Galerkin modeli için kapalı döngü cevabı

yakınsamasını gerçekleştirdiği ve aynı zamanda da $\dot{\theta}$ 'yı $\omega_{alt} = 2.14$ ve $\omega_{üst} = 2.89$ arasında tuttuğu görülmektedir. Doğrusal olmayan basit osilatör modeli ile yüksek dereceli Galerkin modelinin davranışları arasındaki niteliksel benzerlik de doğrusal olmayan basit osilatör modellerinin kullanımı açısından ayrıca cesaret vericidir.

5. Sonuçlar ve Gelecekteki Çalışmalar

Bu makalede doğrusal olmayan basit osilatör modelleri ile temsil edilebilen sistemlerin frekans kısıtlı kontrolü irdelenmiştir. Ulaşılmak istenen kontrol hedefi, frekans kriteri ve genlik kriteri olarak iki kritere ayrılmış, ve bu kriterlerin sağlanması için gereken şartlar çıkartılmıştır. Elde edilen sonuçlar, gerçekçi bir uygulama olan bir kovuk üzerindeki hava akışının kontrolü problemi üzerinde örneklenmiştir. Bir doğrusal olmayan basit osilatör modelinin bu sistemin akışının yeterli doğrulukta temsil edebildiği, ve bu basit model üzerinde bildirideki yöntemler kullanılarak tasarlanan bir denetleyicinin, kontrol hedeflerini başardığı görülmüştür.

Bu bildirideki sonuçlar akış kontrolü bakış açısından geliştirilmiş ve sunulmuş olsa da, tünel diyetler, modülasyon, kalp pilleri, işitme cihazları gibi pek çok uygulamada frekans kısıtlı osilatör modellerine ihtiyaç duyulduğundan, çalışmanın daha da gelişme ve başka alanlara genişleme potansiyeli mevcuttur. Gelecekteki çalışmalar arasında daha farklı osilatör modellerinin analizi, değişik kontrol yasalarının incelenmesi ve sonuçların başka alanlara ve örneklerle uygulanması sayılabilir.

A. Sav 3.1'in İspatı

Önce $\dot{\theta} > \omega_{alt}$ olması için gerekli şartları bulalım. (6) denkleminde θ 'nın dinamiğini kullanarak,

$$\omega_{alt} < \dot{\theta} = \omega + A (\cos(\theta) b_2 - \sin(\theta) b_1) \times (\cos(\phi) \cos(\theta) + \sin(\phi) \sin(\theta))$$

$$\omega_{alt} - \omega < Ab_2 \cos(\phi) \cos^2(\theta) - Ab_1 \sin(\phi) \sin^2(\theta) + (Ab_2 \sin(\phi) - Ab_1 \cos(\phi)) \sin(\theta) \cos(\theta) .$$

İki tarafı da $\cos^2(\theta)$ 'ya böler ve $\cos^{-2}(\theta) = \sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$ özdeşliğini kullanır, açar ve ortak terimleri toplarsak

$$0 < (\omega - \omega_{alt} - Ab_1 \sin(\phi)) \tan^2(\theta) + (Ab_2 \sin(\phi) - Ab_1 \cos(\phi)) \tan(\theta) + Ab_2 \cos(\phi) + \omega - \omega_{alt} . \quad (23)$$

Denlemin sağ tarafı $\tan(\theta)$ cinsinden ikinci derece bir polinom olduğundan, her zaman pozitif olması için baş katsayının pozitif olması ve ayırtaç (diskriminant) değerinin de negatif olması gereklidir. İlk şart için

$$(\omega - \omega_{alt} - Ab_1 \sin(\phi)) > 0 \quad (24)$$

olmalıdır. İkinci şart için (23)'nin ayırtacının negatif olma koşulu aşağıdaki gibidir

$$\Delta_1 = (Ab_2 \sin(\phi) - Ab_1 \cos(\phi))^2 - 4(\omega - \omega_{alt} - Ab_1 \sin(\phi)) \times (Ab_2 \cos(\phi) + \omega - \omega_{alt}) < 0 .$$

Açarsak ve A 'nın kuvvetleri cinsinden ortak paranteze alırsak

$$\Delta_1 = (b_2 \sin(\phi) + b_1 \cos(\phi))^2 A^2 + (-4(\omega - \omega_{alt})b_2 \cos(\phi) + 4b_1 \sin(\phi)(\omega - \omega_{alt})) A - 4(\omega - \omega_{alt})^2 < 0 .$$

Yukarıdaki ifade A cinsinden ikinci derece bir ifade olup, baş katsayısı $(b_2 \sin(\phi) + b_1 \cos(\phi))^2$ pozitif olduğundan, negatif olduğu yerler kökleri arasında olacaktır. Kökleri karesel denklemden hesaplırsak

$$A_{1,2} = \frac{2(\omega - \omega_{alt}) (b_2 \cos(\phi) - b_1 \sin(\phi) \mp \sqrt{b_2^2 + b_1^2})}{(b_1 \cos(\phi) + b_2 \sin(\phi))^2}$$

O halde verilen bir (A^*, ϕ) için $\dot{\theta} > \omega_{alt}$ olması için (A^*, ϕ) 'nin (24) ifadesini sağlaması ve $A_1(\phi^*) < A^* < A_2(\phi^*)$ olması yeterlidir. Aşağıdaki tanımları yaparsak

$$\mathcal{S}_0 := \{(\phi, A) : \omega - \omega_{alt} - Ab_1 \sin(\phi) > 0\}$$

$$\mathcal{S}_1 := \{(\phi, A) : A_1(\phi) < A < A_2(\phi)\}$$

o zaman istenilen şart $(\phi^*, A^*) \in \mathcal{S}_0 \cap \mathcal{S}_1$ olarak ifade edilebilir. Bu noktada $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_0$ olduğu gösterilebilir.³ O halde $\dot{\theta} > \omega_{alt}$ olma koşulu sadece $(\phi^*, A^*) \in \mathcal{S}_1$ olarak yazılabilir.

$\dot{\theta} < \omega_{üst}$ için gerekli şartlar da yukarıdakine benzer şekilde $(A^*, \phi) \in \mathcal{S}_2$ olarak gösterilebilir; $\dot{\theta} > \omega_{alt}$ ve $\dot{\theta} < \omega_{üst}$ için olan sonuçları toplarsak da frekans kriteri için gereken şart $(\phi^*, A^*) \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ biçiminde ifade edilebilir.

B. Sav 3.2'nin ispatı

Önce (6) ifadesinde verilen kapalı çevrim sisteminin kutupsal biçimini aşağıdaki gibi derli toplu olarak yazalım

$$\dot{r} = g(\theta, \phi, A) r - \alpha r^n \quad (25)$$

$$\dot{\theta} = h(\theta, \phi, A) \quad (26)$$

Burada

$$g(\theta, \phi, A) := \sigma + (\cos(\theta) b_1 + \sin(\theta) b_2) \times A (\cos(\phi) \cos(\theta) + \sin(\phi) \sin(\theta))$$

$$h(\theta, \phi, A) := \omega + (\cos(\theta) b_2 - \sin(\theta) b_1) \times A (\cos(\phi) \cos(\theta) + \sin(\phi) \sin(\theta)) .$$

Kontrol parametreleri A ve ϕ , $(\phi, A) \in \mathcal{S}$ olacak şekilde seçildiğinden $0 < \omega_{alt} < \dot{\theta} < \omega_{üst}$ olduğu için $\dot{\theta}$ hep pozitifdir ve bu da θ 'nın zamanla monoton artan olması demektir. O halde zaman değerleri t ile açı değerleri θ arasında birebir ve örten öyle bir χ fonksiyonu bulunabilir ki

$$\theta = \chi(t) \text{ and } t = \chi^{-1}(\theta) . \quad (27)$$

Burada χ (26) denkleminin $\theta(0) = \theta_0$ noktasından başlayan çözümleri olup monoton artan bir fonksiyondur. Bu birebir ve örten eşleşme sonucunda θ 'ya, t yerine geçecek yeni bir zaman ölçeği olarak bakılabilir ve r 'nin θ 'ya göre dinamiği incelenebilir:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{(g(\theta, \phi, A) r - \alpha r^n)}{\dot{\theta}} .$$

³Bu ifadenin ispatı yer darlığından dolayı bildiriden çıkartılmıştır.

$0 < \omega_{\text{alt}} < \dot{\theta} < \omega_{\text{üst}}$ olduğu için
 $\omega_{\text{üst}}^{-1}(g(\theta, \phi, A)r - \alpha r^n) < \frac{dr}{d\theta} < \omega_{\text{alt}}^{-1}(g(\theta, \phi, A)r - \alpha r^n)$.

yazılabilir. O halde aşağıdaki iki sistemi analiz etmek faydalı olacaktır

$$\Sigma_1 : \frac{dr}{d\theta} = \omega_{\text{üst}}^{-1}(g(\theta, \phi, A)r - \alpha r^n) \quad (28)$$

$$\Sigma_2 : \frac{dr}{d\theta} = \omega_{\text{alt}}^{-1}(g(\theta, \phi, A)r - \alpha r^n) \quad (29)$$

çünkü bu sistemler orjinal sistemin davranışını sınırlandıran sistemlerdir. Önce (28) ifadesindeki Σ_1 'yi ele alalım. Aşağıdaki çözümün denklemi sağladığı teyit edilebilir

$$r(\theta)^{n-1} = \frac{M(\theta, \phi, A)r_0^{n-1}}{(n-1)\omega_{\text{üst}}^{-1}r_0^{n-1}\alpha \int_0^\theta M(y, \phi, A)dy + 1}. \quad (30)$$

Burada

$$M(\theta, \phi, A) := e^{(n-1)\omega_{\text{üst}}^{-1} \int_0^\theta g(z, \phi, A)dz}.$$

şeklindedir. Eğer kontrol parametreleri $(\phi^*, A^*) \in \mathcal{S}_m$ olacak şekilde seçilirse, bu şartlar altında $\theta \rightarrow \infty$ için $M(\theta, \phi^*, A^*) \rightarrow 0$ olduğunu ve $0 < C_4 \leq \lim_{\theta \rightarrow \infty} \int_0^\theta M(y, \phi, A)dy \leq C_5$ ifadesini sağlayan $C_4, C_5 \in \mathbb{R}_+$ değerleri olduğu gösterilebilir.⁴ O halde (30)'den $\theta \rightarrow \infty$ için $r \rightarrow 0$ olduğu görülür. Aynı sonuç (29) ifadesindeki Σ_2 sistemi için de benzer şekilde elde edilebilir. Σ_1 ve Σ_2 sistemlerinin gezimleri orjinal sistemin gezimlerini aşağıdan ve yukarıdan sınırladığına göre, orjinal sistem için de $\theta \rightarrow \infty$ için $r \rightarrow 0$ olduğu sonucu çıkar. Ayrıca bir monoton artan χ fonksiyonu için $\theta = \chi(t)$ olduğunu da hatırlarsak, $t \rightarrow \infty$ için $r \rightarrow 0$ olduğu da çıkar ve böylece sav ispatlanmış olur.

C. Kaynakça

- [1] M. Gad-el Hak. *Flow Control - Passive, Active, and Reactive Flow Management*. Cambridge University Press, New York, NY, 2000.
- [2] T.R. Bewley. Flow control: new challenges for a new Renaissance. *Progress in Aerospace Sciences*, 37(1):21–58, 2001.
- [3] K. Cohen, S. Siegel, T. McLaughlin, E. Gillies, and J. Myatt. Closed-loop approaches to control of a wake flow modeled by the Ginzburg-Landau equation. *Computers & Fluids*, 34(8):927–49–, 2005.
- [4] B. R. Noack, K. Afanasiev, M. Morzynski, G. Tadmor, and F. Thiele. A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. *Journal of Fluid Mechanics*, 497:335–63, 2003.
- [5] B. R. Noack, P. Papas, and P. A. Monkewitz. The need for a pressure-term representation in empirical Galerkin models of incompressible shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 523:339–65, 2005.
- [6] K. Fitzpatrick, Y. Feng, R. Lind, A. J. Kurdila, and D. W. Mikolaitis. Flow control in a driven cavity incorporating excitation phase differential. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 28(1):63–70, 2005.
- [7] M. Samimy, M. Debiasi, E. Caraballo, A. Serrani, X. Yuan, J. Little, and J. H. Myatt. Feedback control of subsonic cavity flows using reduced-order models. *Journal of Fluid Mechanics*, 579:315–346, 2007.
- [8] E. Caraballo, J. Little, M. Debiasi, and M. Samimy. Development and implementation of an experimental based reduced-order model for feedback control of subsonic cavity flows. *Journal of Fluids Engineering*, 129:813–824, 2007.
- [9] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields Applied mathematical sciences*. Springer-Verlag, 1997.
- [10] C. Hayashi. *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. McGraw-Hill, 1964.
- [11] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, New York, NY, 2nd edition, 2003.
- [12] C. W. Rowley and V. Juttijudata. Model-based control and estimation of cavity flow oscillations. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, Seville, Spain, 2005.
- [13] B.R. Noack, G. Tadmor, and M. Morzynski. Low-dimensional models for feedback flow control. Part I: Empirical Galerkin models. In *Proceedings of the 2nd AIAA Flow Control Conference*, Portland, OR, 2004. AIAA Paper 2004-2408.
- [14] G. Tadmor, B.R. Noack, M. Morzynski, and S. Siegel. Low-dimensional models for feedback flow control. Part II: Controller design and dynamic estimation. In *Proceedings of the 2nd AIAA Flow Control Conference*, Portland, OR, 2004. AIAA Paper 2004-2409.
- [15] M. O. Efe and H. Ozbay. Low dimensional modelling and Dirichlet boundary controller design for Burgers equation. *International Journal of Control*, 77(10):895–906, July 2004.

⁴Bu ifadenin ispatı yer darlığından dolayı bildiriden çıkarılmıştır.