

Sistem Tanılama ve Çoklu Sistemlerin Harmanlanması ile Akış Problemlerinin Farklı Çalışma Koşulları Altında Modellenmesi

Coşku Kasnakoğlu¹

¹Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Ankara
kasknakoğlu@etu.edu.tr

Özetçe

Bu makalede akış kontrolü problemlerinin modellenmesi için yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemde akışın hesaplamalı akışkanlar dinamiği (HAD) benzetimleri ile elde edilen anlık görüntülerden bir uygun dikgen ayrışımı (UDA) elde edilir ve bu ayrışımın zaman katsayılarına sistem tanılama yöntemleri uygulanarak bir doğrusal durum uzayı sistemi oluşturulur. Bu işlem, kesme noktası tabir edilen birkaç çalışma noktası için tekrarlanır ve kesme noktalarında elde edilen dinamik modeller, bir çıkış harmanlama tekniği ile birleştirilir. Oluşturulan modeller birkaç doğrusal zamanla değişmeyen (DZD) sistemin bileşiminden oluşması bakımından basit bir yapıya sahip olmakla birlikte, verilen bir akış zarfı içindeki çok farklı akış koşullarını temsil edebilecek güce sahiptir. Makalenin sonunda önerilen modelleme yöntemi, Navier-Stokes denklemleri ile yönetilen ve kinematik akmazlık değerinin değişkenlik gösterdiği bir akış probleminin kontrolü üzerinde örneklendirilmiş ve başarılı sonuçlar elde edildiği görülmüştür.

Abstract

In this paper a novel modeling approach is developed for flow control problems. First snapshots of the flow are obtained from computational fluid dynamics (CFD) simulations. Then a proper orthogonal decomposition (POD) of the flow is obtained from snapshots, and subspace identification methods are applied to the time coefficients of the POD expansion to obtain a linear state space system. This operation is repeated for a number of operating points termed breakpoints, and the models obtained at the breakpoints are fused using an output blending technique. The resulting models are simple in that they are composed of a number of linear time invariant (LTI) systems, but powerful in that they can represent a wide range of flow conditions within a flow envelope. The proposed approach is applied to a flow control case study governed by the Navier-Stokes equations in which the kinematic viscosity of the fluid is varying, and the results obtained are satisfactory.

1. Giriş

Akışkanların hareketi, hayatın her alanında ve devamlı olarak karşımıza çıkan bir kavramdır. Akışkan hareketlerini anlamayabilmek ve kontrol edebilmek, bilimsel, endüstriyel ve teknolojik olarak yüksek öneme sahip bir konudur [1]. Bu alandaki çalışmalar arasında uçaklar ve kanat parçaları üzerindeki akışlar [2], kanal akışları [3], sınır katmanları [4], kaba cisimler üzerindeki akışlar [5], silindir etrafı akışları [6] ve kovuk akışları [7] ile ilgili modelleme ve kontrol çalışmaları sayılabilir.

Akış kontrolünde kullanılan modeller içinde en yaygın olanlardan biri Galerkin modeli (veya Galerkin sistemi) tabir edilen modeldir. Bu model Navier-Stokes [8] denklemlerine bir dizi basitleştirme işlemi uygulanması ile elde edilir. Bunlar arasında uygun dikgen ayrışımı (POD), Galerkin izdüşümü (GI) ve giriş ayırma (GA) sayılabilir [9-11]. Galerkin modelleri çeşitli akış kontrolü uygulamalarında sıklıkla kullanılmıştır; bunlar arasında kovuk akışları [7], silindir etrafı akışları [6] ve engeller üzerindeki akışlar [12] sayılabilir.

Akış kontrolü alanında sıklıkla kullanılmalarına rağmen, Galerkin modellerinin önemli olumsuzlukları ve zorlukları mevcuttur. Bunlardan ilki, bu modellerin doğrusal olmayan sistemler olmalarıdır. Bu durum, Galerkin modelleri üzerinde analiz ve kontrol tasarımı yapmayı çok zor kılmakta, tasarımcıyı ya doğrusallaştırma yapmaya [13] ya da zor, karmaşık ve duruma özel doğrusal olmayan kontrol yöntemleri kullanmaya [12, 14] zorlamaktadır. Ek bir sıkıntı da, Galerkin modelleri elde edilirken Navier-Stokes KTD üzerinde karmaşık hesaplar, işlemler ve yaklaşımlar yapılması gereğidir. Bu durum Galerkin sistemi katsayılarında ciddi hatalara yol açabilmekte, hatta bazı durumlarda sistem kararlılığının yitirilmesine yol açabilmektedir [6, 15].

Bu makalede, yukarıda bahsedilen sorunları çözmeye yönelik bir akış modelleme yöntemi irdelenmiştir. İzlenen yöntemde, akışın anlık görüntülerine UDA uygulanmasının ardından, standart Galerkin modellemesindeki GI ve GA adımları yerine alt uzay tanılama yöntemleri kullanılmıştır [16]. Burada, anlık görüntülerden elde edilen zaman katsayıları model çıkışı olarak kullanılmış ve bu katsayıları en iyi temsil edecek bir doğrusal durum uzayı sistemi oluşturulmuştur. Navier-Stokes KTD üzerinde herhangi bir değişiklik, basitleştirme ve yaklaşımlama yapılmadığından dolayı bu adımlardan gelebilecek hatalar önlenmiştir.

Akış kontrolü için şimdiye kadar yapılmış çalışmalar ile ilgili ek bir sıkıntı da, modellerin genellikle tek bir çalışma noktası etrafında elde edilmesidir. Çalışma noktası kavramı herhangi bir akış parametresinin değerine karşılık gelmektedir. Akışkanın yoğunluk ya da akmazlığı, sıcaklık ve Reynolds sayısı, çalışma noktasını belirleyebilecek akış parametrelerine örnek olarak gösterilebilir. Bu çalışmada ele alınan yöntem, birden fazla çalışma noktasını içeren modeller de ortaya çıkarabilmektedir. Bunun için önce, birkaç çalışma noktasına ait anlık görüntülerden UDA kipleri elde edildikten sonra, akış parametresinin her değeri için ayrı bir doğrusal model elde edilir. Bunun ardından modellerin çıkışları, çıkış harmanlama tekniği [18] ile birleştirilir.

Makalenin sonunda, irdelenen modelleme yaklaşımı Navier-Stokes denklemleri ile yönetilen akış problemi üzerine uygulanarak örneklendirilmiş ve başarılı sonuçlar elde edildiği görülmüştür.

2. Problemin Tanımı

İki boyutlu bir $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ akış alanı ve bir \mathbb{H} Hilbert uzayı ele alalım. Hilbert uzayına ait iç çarpımı $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ ve bu iç çarpımın belirlediği normu da $\|\cdot\|$ olarak gösterelim. Bu makalede $\langle h_1, h_2 \rangle = \int_{\Omega} h_1(x)^T h_2(x) dx$ iç çarpımına sahip $\mathbb{H} = \mathcal{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ uzayı üzerinde çalışacağız. Akış alanı Ω üzerindeki akış $q(x, t)$ ile gösterelim; burada $q: \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$, $q(\cdot, t) \in \mathbb{H}$, $u(x, \cdot) \in \mathbb{C}^k$, $k \geq 1$, $t \in \mathbb{R}_+$ zamansal değişken ve $x \in \Omega$ uzaysal değişkendir. Akış alanının değişimi aşağıdaki gibi bir dizi KTD ile ifade edilir

$$X_i(q) = 0, \quad i = 1, \dots, N_e \quad (1)$$

Burada $N_e \in \mathbb{N}$ ve $X_i: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ operatörü hem zamansal hem uzaysal türevler içerir. Akışkan akışlarını tasvir etmede en sık kullanılan denklemler KTD'ler Navier-Stokes denklemleridir [8]. Akış için ilk koşulu

$$q(x, 0) = q_{\text{init}}(x) \quad (2)$$

ve sınır koşulları

$$(B_i(q, \gamma))(x, t) = b_i(x, t), \quad i = 1, \dots, N_b \quad (3)$$

olarak gösterelim; burada $q_{\text{init}} \in \mathbb{H}$, $x \in \partial\Omega$, $t \in \mathbb{R}_+$, $B_i: \mathbb{H} \times \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{H}$, $b_i \in \mathbb{H}$, $N_b \in \mathbb{N}$ ve $\gamma \in \mathbb{R}$ de kontrol girişidir. B_i operatörleri uzaysal türevler içerebilir. Bu makalede incelenen problem, yukarıdaki KTD'ler, ilk koşullar ve sınır koşulları ile tasvir edilen akış kontrol süreçleri için aşağıdaki gibi bir dinamik durum uzayı modeli oluşturmaktır

$$\xi(t + T_s) = A\xi(t) + B\gamma(t) \quad (4)$$

$$y(t) = C\xi(t) + D\gamma(t) \quad (5)$$

Burada $T_s \in \mathbb{R}_+$ örnekleme zamanı, $\xi \in \mathbb{R}^n$ durum vektörü, $n \in \mathbb{N}$ sistemin derecesi ve $y \in \mathbb{R}^N$ de çıkış sinyalidir. Amaç, nispeten basit bir model olan (4)-(5) sistemi ile akış sürecini temsil edebilmek ve gerekirse kontrol edebilmektir. Ek olarak akış sürecini, akış parametrelerinin (mesela yoğunluk, akamazlık, sıcaklık, Reynolds sayısı vs.) farklı değerli altında incelemek de istenmektedir. Bunun için de (4)-(5) biçiminde birden fazla model oluşturulup, daha sonra bu modelleri birleştirmek için bir metod bulunması gerekmektedir.

3. Modelleme Yaklaşımı

Modelleme yaklaşımı için ilk adım, akışın iki boyutlu anlık görüntülerinin (enstantanelerinin) kaydedilmesidir. Bu anlık görüntüler gerçek deneylerden elde edilebileceği gibi (örneğin parçacık görüntüleme hız ölçme teknikleri [19] kullanarak), Navier-Stokes denklemlerinin HAD benzetimleri sonucu elde edilen verilerden de oluşturulabilir. $\mathbf{q}_k(x) = \mathbf{q}(x, t_k)$ ile $t_k = kT_s$ anında elde edilen anlık görüntüyü gösterelim; burada $k = 1, \dots, M$ ve $T_s \in \mathbb{R}_+$ de örnekleme zamanıdır. $\{\mathbf{q}_k\}_{k=1}^M$ ile de $\{t_k\}_{k=1}^M$ anlarında elde edilen $M \in \mathbb{N}$ adet anlık görüntüden oluşan bir kümeyi gösterelim. Bu anlarda sisteme uygulanan giriş de $\{\gamma_k\}_{k=1}^M$ ile gösterelim; burada $\gamma_k = \gamma(t_k)$ şeklindedir.

İkinci aşama akışın uygun dikgen ayrışımının (UDA) elde edilmesidir; bununla ilgili detaylı bilgiye [20] kaynaklarından ulaşılabilir. Boyutu $N < M$ olan bütün $S \in \mathbb{H}$ alt uzayları içerisinde ortalama hata

$$J(S) = E \left[\|\mathbf{q}_j - P_S \mathbf{q}_j\|^2 \right] \quad (6)$$

ifadesini minimum yapan alt uzay, ile N adet UDA kipinin, yani $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ vektörlerinin oluşturduğu alt uzaydır. Yukarıdaki P_S operatörü S alt uzayının üzerine izdüşümü ve E operatörü

de doğrusal bir ortalama işlemini gösterir. Seçilen N adet UDA kipi cinsinden akışı aşağıdaki gibi sonlu boyutlu bir yaklaşımla ile temsil edebiliriz

$$\mathbf{q}(x, t) \approx \sum_{i=1}^N a_i(t) \phi_i(x) \quad (7)$$

Burada $a_i \in \mathbb{R}$ zaman katsayıları olarak adlandırılır ve anlık görüntülerin UDA kipleri üzerine aşağıdaki gibi izdüşümü ile elde edilir

$$a_i(t) = \langle \mathbf{q}(x, t), \phi_i(x) \rangle \quad (8)$$

Akışın (7) ifadesindeki gibi bir UDA açılımını elde ettikten sonra görülebilir ki akışın zaman değişimini belirleyen a_i katsayılarıdır çünkü ϕ_i kiplerini zamana bağlı değişim göstermezler. O halde dinamik modelleme için yapılması gereken, $a_i(t)$ gezingelerine matematiksel bir model oturtulmasıdır. Aranılan model aşağıdaki gibi bir durum uzayı modelidir

$$\xi(t_{k+1}) = A\xi(t_k) + B\gamma(t_k) \quad (9)$$

$$y(t_k) = C\xi(t_k) + D\gamma(t_k) \quad (10)$$

Yukarıdaki model ayrık zamanlı bir modeldir çünkü akışın anlık görüntüleri, bir $T_s \in \mathbb{R}_+$ örnekleme zamanı ile ayrılan $t_k \in \mathbb{R}_+$ ayrık zamanlarında elde edilmiştir. Burada $\xi \in \mathbb{R}^n$ sistemin durum vektörü, $n \in \mathbb{N}$ sistemin derecesi, $\gamma \in \mathbb{R}$ kontrol girişi ve $y \in \mathbb{R}^N$ da çıkış sinyalidir. Sistem çıkışı olarak zaman katsayılarından oluşan aşağıdaki vektör alınmıştır

$$y(t) = a(t) = [a_1(t) \ a_2(t) \ \dots \ a_N(t)]^T \quad (11)$$

Yukarıdaki (9)-(10) sistemi için A , B , C ve D matrisleri alt uzay sistem tanılama yöntemi kullanılarak elde edilecektir [16]. Sistem tanılama için giriş verileri $\{\gamma_k\}_{k=1}^M$ ve çıkış verileri $\{y_k\}_{k=1}^M$ olarak alınacaktır; burada $y_k = y(t_k)$. Alt uzay sistem tanılama tekniği temel olarak, doğrudan en küçük kareler benzeri izdüşüm adımları ile aşağıdaki gibi bir genişletilmiş gözetlenebilirlik matrisinin kestirimine dayanır

$$O_r = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Bunun için önce (9)-(10) denklemlerinden aşağıdaki gibi bir ifade elde edilir

$$Y_r(t_k) = O_r \xi(t_k) + S_r \Gamma_r(t_k) + V(t) \quad (13)$$

Burada

$$Y_r(t_k) = \begin{bmatrix} y(t_k) \\ y(t_{k+1}) \\ \vdots \\ y(t_{k+r-1}) \end{bmatrix}, \quad \Gamma_r(t_k) = \begin{bmatrix} \gamma(t_k) \\ \gamma(t_{k+1}) \\ \vdots \\ \gamma(t_{k+r-1}) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$S_r = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CB & D & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ CA^{r-2}B & CA^{r-3}B & \dots & CB & D \end{bmatrix} \quad (15)$$

ve $V(t)$ değişkeni de çıkış gürültüsünün sisteme katkısını göstermektedir. Buradan genişletilmiş gözetlenebilirlik matrisi O_r 'yi elde etmek için (13) ifadesinin sağ ve sol tarafı, $S_r \Gamma_r(t_k)$ terimini yok edecek ve $V(t)$ 'den gelen gürültü katkısını asimptotik olarak sıfırlayacak terimler ile ilintilendirilir. O_r elde edildikten sonra O_r 'nin ilk blok satırını kullanarak C 'yi ve kaydırma özelliği kullanarak da A 'yi elde etmek mümkündür. A ve C elde edildikten sonra aşağıdaki

ifadeye doğrusal en küçük kareler yöntemi uygulanarak B and D 'yi kestirmek mümkündür

$$y(t_k) = C(zI - A)^{-1}Bu(t_k) + Du(t_k) \quad (16)$$

Yukarıdaki eşitlik, (9)-(10) sisteminin zaman kaydırma operatörü z cinsinden ifadesidir. Burada kısaca özetlenen alt uzay sistem tanılama tekniği ile ilgili detaylı bilgiye [16, 21, 22] kaynaklarından ulaşılabılır.

Yukarıdaki adımlar izlenerek oluşturan model bir doğrusal durum uzayı modelidir. Doğrusal modeller, çalışma noktasına yakın kaldığı sürece akış davranışını başarılı olarak temsil ederler, fakat eğer bazı akış parametrelerinin (örneğin yoğunluk veya akmazlık) tasarım koşullarından çok farklı değerler aldığı durumlarda yetersiz kalabilirler. Bu gibi durumlarda baş edebilmek için, verilen akış zarfı içerisinde akış parametrelerinin değişik değerleri için anlık görüntüler elde etmek ve (9)-(10) tipinde birden fazla model elde etmek mümkündür. Anlatımı basitleştirmek için çalışma esnasında tek bir akış parametresinin değiştiğini varsayacağız; fakat elde edilen sonuçları birden fazla akış parametresi için genellemek çok zor değildir. Akış parametresini θ ile gösterelim ve $\theta \in \mathbb{R}$ ile de parametrenin içinde değişeceği *akış zarfını* gösterelim; bu durumda $\theta \in \Theta$ olacaktır. Akış zarfı içerisinde $p \in \mathbb{N}$ adet *kesme noktası* $\theta_i \in \Theta$ alalım ve bu noktaların her biri için yukarıdaki yöntemi takip ederek p adet doğrusal durum uzayı modeli oluşturalım. Bu modelleri topluca

$$\begin{aligned} \xi(t_{k+1}) &= A(\theta)\xi(t_k) + B(\theta)\gamma(t_k) \\ y(t_k) &= C(\theta)\xi(t_k) + D(\theta)\gamma(t_k) \end{aligned} \quad (17)$$

biçiminde gösterebiliriz; burada $\theta = \theta_1, \dots, \theta_p$. Akış parametresi θ 'nın, kesme noktaları arasında kalan değerlerinde sistem davranışını elde etmek için *çıkış harmanlama* tekniği kullanacağız [18]. Bu teknikte kesme noktaları için elde edilmiş olan (17)-(18) denklemlerinde gösterilen p adet sistem paralel olarak çalıştırılır ve θ parametresinin anlık değeri kullanılarak sistemlerin çıkışları üzerinde ara değer kestirimi yapılır. Daha detaylı açıklamak gerekirse, eğer $\theta_i \leq \theta < \theta_{i+1}$ ise o zaman *harmanlanmış sistem çıkışı*

$$y(t) = (1 - \lambda)y_i(t) + \lambda y_{i+1}(t) \quad (19)$$

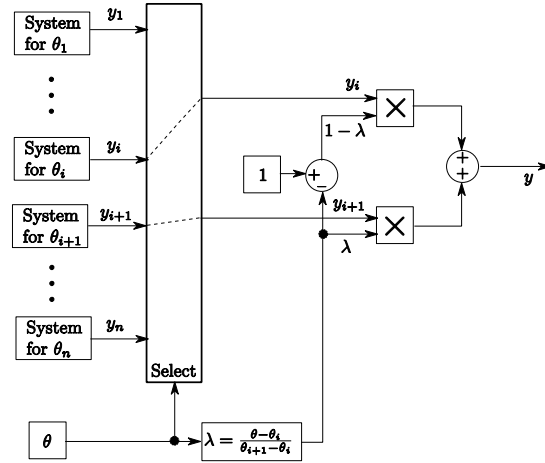
biçimindedir; burada

$$0 \leq \lambda = \frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i} < 1 \quad (20)$$

olup, y_i ve y_{i+1} sırasıyla θ_i ve θ_{i+1} kesme noktaları için elde edilmiş sistem çıkışı gösterir. Çıkış harmanlama tekniği şematik olarak Şekil 1'de gösterilmiştir.

4. Örnek: 2B Navier-Stokes Denklemleri ile Yönetilen bir Akış için Sınır Kontrolü

Bu örnekte Navier-Stokes denklemleri ile yönetilen, iki boyutlu karesel bir alan $\Omega = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ üzerinde gerçekleşen, ve kontrol etkisinin sınır koşulları yoluyla sistemi etkilediği bir problem üzerinde durulacaktır. İlgilenilen akış parametresi θ , *kinematik akmazlık* (v), olarak seçilecektir; bu parametre, akmazlık kuvvetlerinin atalet kuvvetlerine oranıdır. SI birim sisteminde kinematik akmazlığın birimi m^2/s olmakla beraber, *Stoke* (St) and *Centistoke* (cSt) birimleri de oldukça yaygındır. Burada $1 St = 10^{-4} m^2/s$ ve $1 cSt = 10^{-6} m^2/s$ şeklindedir. Kinematik akmazlık, *Reynolds sayısı* (Re) kavramı ile doğrusal ilgilidir. Reynold sayısı farklı akış tiplerini (örneğin düzgün akış ve türbülanslı akış)



Şekil 1. Bir θ parametresine bağlı olarak birden fazla sistemin harmanlanması.

sınıflandırmak için kullanılır. Bu örnekteki amaç, akış parametresinin $\theta = [0.000001, 1] m^2/s$ aralığında (başka bir deyişle $0.000001 m^2/s \leq v \leq 1 m^2/s$ veya $1 cSt \leq v \leq 1000000 cSt$ olduğu durum için) akışın bir dinamik modelini üretmektir; ele alınan aralık geniş bir akışkan yelpazesini kapsamaktadır. İstenilen dinamik modeli elde etmek için Bölüm 3'teki adımlar, *MATLAB* programı yardımıyla gerçekleştirilmiştir. Navier-Stokes KTD'ni çözmek için *Navier2D* isimli HAD çözücüsü kullanılmış [23], alt uzay tanılama yöntemleri için de *System Identification Toolbox* paketinden faydalanılmıştır. Dinamik model elde edildikten sonra, bu modelin akış alanı içerisindeki bir kontrol hedefini gerçekleştirmek için nasıl kullanılabileceği de gösterilmiştir; bunun için de *Control Systems Toolbox* paketinden yararlanılmıştır.

Akış hızını $\mathbf{q}(x, y, t) = [u(x, y, t) \ v(x, y, t)] \in \mathbb{R}^2$ ile gösterelim; burada u ve v akışın yatay ve dikey eksenlerdeki bileşenidir.¹ Akış, Navier-Stokes denklemleri tarafından yönetilmekte olup, ilk koşullar

$$u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0, \quad (21)$$

sınır koşulları

$$u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 1 \quad (22)$$

$$v(x, 0, t) = v(x, 1, t) = 0 \quad (23)$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0, y, t) = 0 \quad (24)$$

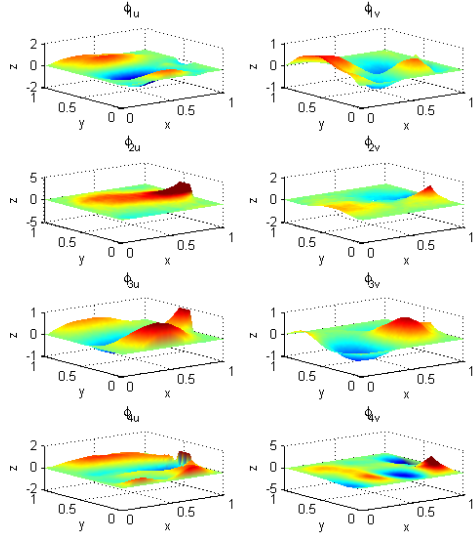
$$u(1, y, t) = \begin{cases} 0, & y \in [0, 0.42] \\ \gamma(t), & y \in [0.42, 0.58] \\ 0, & y \in [0.58, 1] \end{cases} \quad (25)$$

$$v(1, y, t) = 0 \quad (26)$$

şeklinde. Kontrol girişi $\gamma \in \mathbb{R}$ olarak gösterilmiştir. Bu akış problemi daha önceki çalışmalarımızda (mesela [11]) basit görünümü fakat aslında oldukça uğraştırıcı bir test problemi olarak ortaya atılmıştır.

Bölüm 3'te verilen yöntemi olarak yukarıdaki akış denklemlerinin, *Navier2D* HAD çözücüsü ile benzetimleri

¹ Birbirine çok benzeyen v ve v sembollerinin karıştırmamak gerekir; ilki akışın dikey hızını gösterirken ikincisi kinematik akmazlığı göstermektedir.



Şekil 2. Anlık görüntülerden elde edilen ilk dört UDA kipi; ϕ_{iu} ve ϕ_{iv} sırasıyla i . kipi yatay ve dikey bileşenin gösterir.

yapılmıştır. Değişik giriş koşulları altında pek çok benzetim yapılmıştır; bunlar arasında sıfır giriş, değişken frekanslı sinüs sinyali, kara dalga, rampa fonksiyonu ve beyaz gürültü sayılabilir. Her benzetim $T_s = 0.0069$ saniyelik örnekleme zamanı ile 1000 zaman anında ve akış alanının 50×50 'lik düzgün bir örgüsü üzerinde gerçekleştirilmiştir. Bu benzetimler akış parametresinin, yani kinematik akmazlık ν parametresinin, on değişik değeri için tekrarlanmıştır. Seçilen kesme noktaları $\nu_1 = 0.000010$, $\nu_2 = 0.00001931$, $\nu_3 = 0.00037276$, $\nu_4 = 0.00719686$, $\nu_5 = 0.07142950$, $\nu_6 = 0.21428650$, $\nu_7 = 0.37275937$, $\nu_8 = 0.57142900$, $\nu_9 = 0.78571450$ and $\nu_{10} = 1.00000000$ olarak belirlenmiştir.

İkinci adım, UDA kiplerinin elde edilmesidir. Yine Bölüm 3'te verilen işlemlerin akışın anlık görüntülerine uygulanmasıyla elde edilen UDA kiplerinden (ϕ_i) ilk dört tanesi Şekil 2'de gösterilmiştir. Bu UDA kiplerine karşılık gelen özdeğerler incelendiği zaman bu dört kipi anlık görüntülerdeki enerjinin yaklaşık %96'sını kapsadığı gösterilebilir. Bu durumda (7) ifadesindeki UDA açılımını $N = 4$ 'te kesmek mantıklı olacaktır.

UDA kiplerinin elde edilmesinin ardından, her kesme değeri ν_i için elde edilen anlık görüntülerin, (8) ifadesindeki gibi UDA kiplerinin üzerine izdüşümü alınarak zaman katsayıları a_i elde edilmiştir. Bu katsayılardan elde edilen (11) vektörü, sistem tanılama için çıkışı olarak alınmıştır. Bu çıkış verileri giriş değerleri ile birleştirilerek sistem tanılama için giriş-çıkış verileri oluşturulmuştur. Bu veriler iki bölüme ayrılmıştır; ilk bölüm kestirim verileri, ikinci bölüm de doğrulama verileridir. Kestirim verilerine alt uzay tanılama yöntemi uygulanması ile her kesim noktası ν_i için bir doğrusal durum uzayı model ortaya çıkmış ve toplamda on adet model elde edilmiştir. Elde edilen sistemlerin derecesi $n = 4$ olarak seçilmiştir. Bu sayı, değişik dereceler ile elde edilen modellerin kıyaslanması ve Hankel tekil değerleri

ν (m^2/s)	YOKH
0.00000100	16.06740648
0.00001931	16.18678612
0.00037276	16.1782188
0.00719686	2.789811998
0.07142950	1.061357123
0.21428650	0.941987259
0.37275937	0.890139528
0.57142900	0.895443896
0.78571450	0.95728875
1.00000000	0.87916504

Tablo 1. Kesme noktalarındaki modeller için zaman katsayıları ve model çıktıları arasındaki yüzde ortalama karesel hata (YOKH).

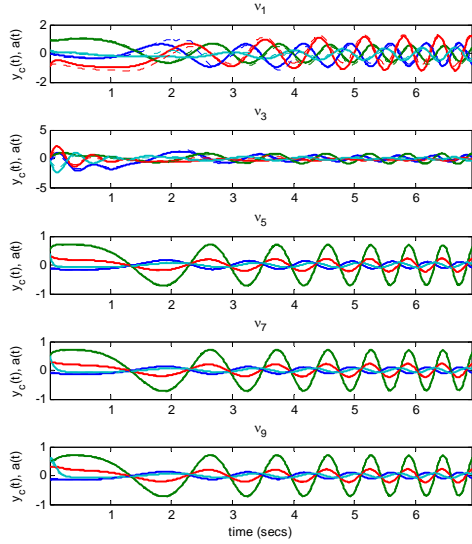
yardımlarıyla her durumun görelî öneminin değerlendirilmesi ile belirlenmiştir. Değişken frekanslı sinüs giriş için anlık görüntülerden elde edilen a_i zaman katsayıları ile dinamik modellerden elde edilen y_i katsayılarının bir kıyaslaması Şekil 3'te görülebilir. Modellerin gerçek zaman katsayılarına oldukça yakın cevaplar verdikleri görülmektedir. Aslında yüksek akmazlık değerleri için sistem çıkışların zaman katsayıları ile birebir örtüşmektedir. Düşük akmazlık değerleri için model çıktıları zaman katsayılarını mükemmel derecede iyi temsi edemese de, cevabın genel eğilimini iyi bir şekilde yakalayabilmiştir. Kullanılan diğer girişler için de (sıfır giriş, sinüs giriş, kare dalga, beyaz gürültü vs.) benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Dinamik modellerin başarımını sayısal olarak ifade etmek için yüzde ortalama karesel hata (YOKH) kullanılabilir. Verilen bir kesme noktası ν_i için YOKH, M adet anlık görüntülerin ve N adet sistem çıkışının tümü üzerinden aşağıdaki gibi hesaplanır

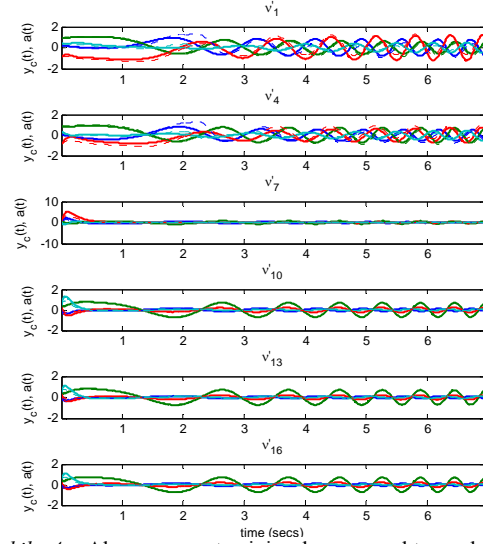
$$\%RMSE = 100 \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N \left(\frac{a_i(t_k) - y_i(t_k)}{a_i(t_k)} \right)^2}. \quad (27)$$

Tablo 1'de sistemin girişi değişken frekanslı sinüs olduğu durumda kesme noktaları için hesaplanmış olan YOKH değerleri verilmiştir. Hatanın kabul edilebilir büyüklükte olduğu ve çoğunlukla %1-%2 civarında olduğu görülmektedir. Düşük akmazlık değerleri için hata %16'ya kadar çıkabilmektedir ancak bu beklenen bir durumdur çünkü düşük ν değerleri, türbülans eğilimi yüksek akışlara tekabül etmektedir ki bu tür akış davranışlarını hatasız olarak modellemek neredeyse imkansızdır.

Sonraki adım, elde edilen on dinamik modelin birleştirilmesi ile akış zarfı Θ 'nın tüm değerleri için akış özelliklerini kestirebilecek duruma gelinmesidir. Bunun için yine Bölüm 3'te bahsedilen çıkış harmanlama tekniği kullanılmıştır (tekrar bkz. Şekil 1). Bunun neticesinde elde edilen modelin başarımı kestirmek için, ν parametresi için kesme noktaları aralarında kalan birkaç değer seçilmiş, bunlar için fazladan HAD benzetimleri yapılmış ve zaman katsayıları



Şekil 3. Akış parametresinin kesme noktası değerleri için anlık görüntülerden elde edilen zaman katsayıları $a(t)$ (kesikli çizgiler) ve model çıktıları $y_c(t)$ (düz çizgiler).



Şekil 4. Akış parametresinin kesme noktası dışı değerleri için anlık görüntülerden elde edilen zaman katsayıları $a(t)$ (kesikli çizgiler) ve harmanlanmış model çıktıları $y_c(t)$ (düz çizgiler).

elde edilmiştir. Seçilen kesme noktası dışı değerler: $v'_1 = 0.00000268$, $v'_2 = 0.00000720$, $v'_3 = 0.00005179$, $v'_4 = 0.00013895$, $v'_5 = 0.00100000$, $v'_6 = 0.00268270$, $v'_7 = 0.01930698$, $v'_8 = 0.05179475$, $v'_9 = 0.13894955$, $v'_{10} = 0.14285800$, $v'_{11} = 0.28571500$, $v'_{12} = 0.35714350$, $v'_{13} = 0.42857200$, $v'_{14} = 0.50000050$, $v'_{15} = 0.64285750$, $v'_{16} = 0.71428600$, $v'_{17} = 0.85714300$, ve $v'_{18} = 0.92857150$. Şekil 4'te bu v değerleri için elde edilen zaman katsayıları ile çıkış-harmanlama tekniği ile elde edilen modelin çıktısı verilmiştir. Sistem cevaplarının birbirine oldukça yakın olduğu görülmektedir. Her durum için YOKH değerleri de Tablo 2'de listelenmiş olup, bu değerlerin de kabul edilebilir olduğu söylenebilir. Özetle önerilen yaklaşımın, istenilen parametre aralığı Θ için akış sürecini modellemede başarılı olduğu sonucuna varılabilir.

Başta da belirtildiği gibi, akış süreci için bir dinamik modeller oluşturmanın ana nedeni, süreç için bir kontrol tasarımı gerçekleştirme isteğidir. Örnek olarak eldeki problem için amacımızın akış alanının merkezi olan $(x_o, y_o) : = (0.5, 0.5)$ noktasının yatay hızını kontrol etmek olduğunu kabul edilmiştir. Kontrol tasarımı için de, modellemede izlenen yolun bir benzeri izlenmiştir. Önce kesme noktalarındaki modeller için on adet kontrolör tasarımı yapılmış, daha sonra da kontrolör çıkışları, akış parametresinin anlık değerine göre harmanlanmıştır. Kontrol çıkışlarına uygulandığı zaman harmanlama işlemine genellikle *giriş harmanlama* denir; bunun nedenin harmanlanan sinyallerin akış sürecinin girişini oluşturmasıdır. Kontrol edilecek değer y_c ile gösterilirse, bu değer UDA açılımı (7) cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir

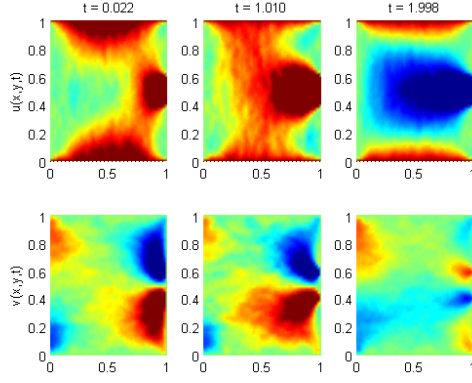
$$y_c(t) = u(x_o, y_o, t) =: C'a(t) \quad (28)$$

Burada C' ile gösterilen aşağıdaki 1×4 'lük matristir

$$C' := [\phi_{1,u}(x_o, y_o) \dots \phi_{4,u}(x_o, y_o)] \quad (29)$$

v (m^2/s)	YOKH
0.00000268	17.79804256
0.00000720	17.03198281
0.00005179	16.28663879
0.00013895	15.7536293
0.00100000	17.98535088
0.00268270	15.74610951
0.01930698	5.685199342
0.05179475	5.222336112
0.13894955	1.836132481
0.14285800	1.842522767
0.28571500	1.646235896
0.35714350	1.636625119
0.42857200	1.742876644
0.50000050	1.740751512
0.64285750	1.656126996
0.71428600	1.65020463
0.85714300	1.055233326
0.92857150	1.05628866

Tablo 2. Kesme noktaları haricindeki değerler için zaman katsayıları ve harmanlanmış model çıktıları arasındaki yüzde ortalama karesel hata (YOKH) .



Şekil 5. Akış parametresinin zamanla değiştiği ve referans sinyalinin $t = 1$ anında 1 'den -1 'e düştüğü durum için kapalı çevrim sisteminin HAD benzetimlerinden elde edilen anlık görüntüler.

Verilen bir kesme noktası v_i için daha önceki adımlardan eliminde (9)-(10) biçiminde bir dinamik modelin mevcut olduğunu hatırlayalım. O halde (10) ve (28) ifadelerinden

$$\begin{aligned} y_c &= C'a = C'(C\xi + D\gamma) \\ &= C'C\xi + C'D\gamma \\ &= C_c\xi + D_c\gamma \end{aligned} \quad (30)$$

elde edilebilir; burada $C_c := C'C$ ve $D_c := C'D$. Yukarıdaki ifadeyi durum dinamiği (9) ile alt alta yazarsak

$$\xi(t_{k+1}) = A\xi(t_k) + B\gamma(t_k) \quad (31)$$

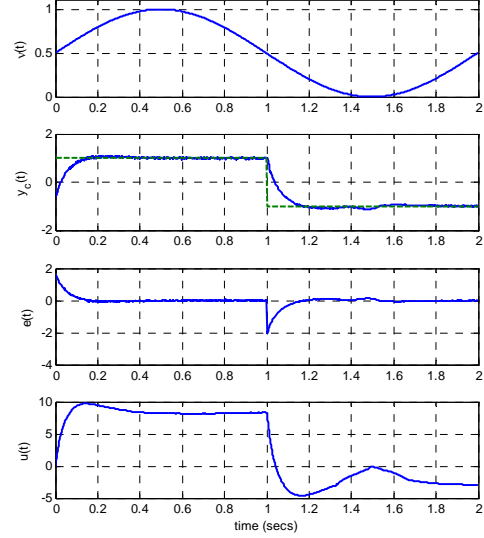
$$y_c(t_k) = C_c\xi(t_k) + D_c\gamma(t_k) \quad (32)$$

Bu γ 'dan y_c 'ye bir tek-giriş tek-çıkış sistemdir. y_c tarafından izlenmesini istediğimiz sinyali y_{ref} ile gösterelim. İstenilen izlemeyi sağlamak için transfer fonksyonu K olan aşağıdaki gibi bir kontrolcü tasarlanabilir

$$K(z) := \frac{\Gamma(z)}{E(z)} \quad (33)$$

Burada $\Gamma(z)$ ile gösterilen $\gamma(t)$ 'nin z dönüşümü ve $E(z)$ ile gösterilen de izleme hatasının ($e(t) := y_{ref}(t) - y_c(t)$) z dönüşümüdür. $K(z)$ 'yi elde etmek için bir dizi standart ve otomatik tasarım metodu mevcuttur; bunların arasında PID ayarlama teknikleri, iç model kontrol (İMK) teknikleri, doğrusal karesel Gaussian (DKG) sentezi ve eniyileme tabanlı tasarımlar sayılabilir. Sayılan yöntemler ile tasarlanan bir dizi kontrolcü ile yapılan denemeler neticesinde en iyi sonuçların İMK tasarım tekniği [24] ile yapılanlardan elde edildiği görülmüş ve bu teknik kullanılarak kesme noktaları için on adet kontrolör (K_i) tasarlanmıştır. İMK tasarım tekniğinin ana parametrelerinden birisi olan *istenilen baskın kapalı-çevrim zaman sabiti* (τ) parametresi 0.1 saniye olarak seçilmiştir; bu da oturma zamanının yaklaşık 0.5 saniye olması demektir. Sonraki adım, tasarlanan bu on adet K_i kontrolörünün harmanlanmasıdır. Bu sayede v parametresinin θ akış zarfı içerisindeki tüm değerleri için istenilen referans takibi sağlanabilecektir. Eğer akış parametresi v 'nün anlık değeri $v_i \leq v < v_{i+1}$ ifadesini sağlıyorsa, o zaman akış sürecine uygulanacak kontrol γ aşağıdaki gibi tasarlanır

$$\gamma(t) = (1 - \lambda)\gamma_i(t) + \lambda\gamma_{i+1}(t) \quad (34)$$



Şekil 6. Üstten birinci: Akış parametresi v 'nün değişimi. İkinci: merkez noktasının gezinmesi (düz) ve referans sinyali (kesikli) Üçüncü: Hata sinyali $y_{ref} - y_c$. Dördüncü: Kontrol sinyali

Burada

$$0 \leq \lambda = \frac{v - v_i}{v_{i+1} - v_i} < 1 \quad (35)$$

olup, i . İMK kontrolcüsünün girişi γ_i ile gösterilmiştir. Tasarlanan kontrolcüyü test etmek için v parametresinin akış zarfı θ 'nın asgari ve azami değerleri arasında değiştiği bir senaryo ele alınmış ve Navier-Stokes KTD ile kontrolcülerin oluşan kapalı çevrim sisteminin HAD benzetimleri yapılmıştır. Bu benzetimler için takip edilecek referans sinyali y_{ref} yaklaşık $t = 1.0$ saniye kadar 1 değerinde tutulduktan sonra -1 değerine geçirilmiş, ayrıca benzetimleri daha gerçekçi yapmak için giriş ve çıkışa 0.1 büyüklüğünde beyaz gürültü tipinde bozucular eklenmiştir. Kapalı çevrim sisteminin HAD benzetimlerinden elde edilen anlık görüntüler Şekil 5'te, $(x_o, y_o) = (0.5, 0.5)$ noktasının gezinmesi, akış parametresinin değişimi, takip hatası ve referans sinyali y_{ref} de Şekil 6'da gösterilmiştir. Akış parametresindeki değişimlere rağmen kapalı çevrim sisteminin istenilen takibi gerçekleştirdiği ve (x_o, y_o) noktasının hızını y_{ref} 'e yakın tuttuğunu söylemek mümkündür. Referans değerinin etrafında küçük bir salınım gözlenmekle beraber bu davranış kabul edilebilir boyutlardadır. Bu salınının sebepleri arasında giriş ve çıkıştaki gürültüler, kesim noktaları haricindeki noktalarda meydana gelen modelleme hataları ve sonsuz boyutlu bir KTD'yi sonlu boyutlu ve doğrusal bir sistem ile yaklaşıklardan doğan hatalar sayılabilir.

5. Sonuçlar ve Gelecekteki Çalışmalar

Bu makalede akış kontrol problemleri için sistematik bir dinamik modelleme yöntemi irdelenmiştir. Önce akış sürecinin anlık görüntüleri deneysel olarak veya HAD benzetimleri ile elde edilmiş ve bunlardan UDA kipleri

hesaplanmıştır. UDA açılımının zaman katsayıları ile giriş değerlerinden alt uzay tanılama yöntemleri kullanılarak zaman katsayılarının dinamiğini temsil eden doğrusal bir model oluşturulmuştur. Bu işlem, bir veya birkaç akış parametresini temsil eden ve kesme noktaları tabir edilen çalışma noktaları için tekrarlanmıştır. Kesme noktalarında elde edilen modeller daha sonra çıkış harmanlama tekniği ile birleştirilmiştir. Bunun sonucunda verilen bir akış zarfı (yani akış parametrelerini için istenilen bir değer aralığı) dâhilinde akışı temsil edebilen bir dinamik model ortaya çıkmıştır. Geliştirilen modelleme yaklaşımı, Navier-Stokes denklemleri ile yönetilen ve akış parametresinin kinematik akmazlık olduğu bir akış kontrolü problemi üzerinde örneklendirilmiştir. Akış parametresinin akış zarfı içinde değişiklik gösterdiği durum için kapalı çevrim sisteminin HAD benzetimleri yapılmış ve istenilen referans takibinin başarıldığı görülmüştür.

Bu çalışmanın ana katkıları, faydaları ve yeniliklerini özetlersek: UDA kiplerinin elde edilmesinin ardından Gİ ve GA yerine alt uzay tanılama tekniklerinin kullanılması bakımında standart Galerkin modelleme tekniğinden yöntem olarak farklıdır. Bu sayede Navier-Stokes KTD'leri üzerinde doğrudan herhangi bir işlem, sadeleştirme, yaklaşıklama vb. işlem yapılmamış olur ve böylece Galerkin modellerindeki ana hata kaynaklarından biri ortadan kalkmış olur. Önerilen yöntemle ilgili ek bir fayda da, alt uzay tanılama yöntemlerinin uygulanmasının Gİ ve GA'ya göre çok daha kolay olmasıdır. Bunun ana sebebi de yaygın olarak kullanılan matematiksel yazılım paketlerinde (örneğin MATLAB) sistem tanılama yöntemlerini için hazır ve hızlı fonksiyonlar bulunmasıdır. Bir başka önemli katkı da ele alınan yöntemin akış sürecini değişik çalışma koşulları altında ve verilen bir akış zarfı dâhilinde sürekli olarak modelleyebilmesidir. Elde edilen modelin doğrusal modeller oluşması da klasik doğrusal olmayan Galerkin modellerine göre önemli avantajdır. Doğrusal sistemlerin analizi doğrusal olmayanlara göre daha kolay olup, kontrol tasarımı için de pek çok genel ve standart metod mevcuttur. Bu modelleri kullanarak kesme noktalarındaki doğrusal modeller için kontrolör tasarımı yapıldıktan sonra bu modeller yine harmanlama tekniği ile birleştirilebilir. Bu tür bir yaklaşımın yapılabilir olduğu ve başarılı sonuçlar verdiği Bölüm 4'te gösterilmiştir.

Gelecekteki çalışmalar arasında sistem tanılama için farklı yöntemler denenmesi ve önerilen yöntemin başka akış kontrolü problemlerine uygulanması sayılabilir.

6. Kaynakça

- [1] M. Gad-el Hak. *Flow Control - Passive, Active, and Reactive Flow Management*. Cambridge University Press, New York, NY, 2000.
- [2] J. Wu, X. Lu, A.G. Denny, M. Fan, and J.M. Wu. Post-stall flow control on an airfoil by local unsteady forcing. *Journal of Fluid Mechanics*, 371:21–58, 1998.
- [3] L. Baramov, O. R. Tutty, and E. Rogers. H-infinity control of non-periodic two-dimensional channel flow. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12(1):111–122, 2004.
- [4] J. Kim. Control of turbulent boundary layers. *Physics of Fluids*, 15:1093, 2003.
- [5] K. Cohen, S. Siegel, T. McLaughlin, E. Gillies, and J. Myatt. Closed-loop approaches to control of a wake flow

modeled by the Ginzburg-Landau equation. *Computers & Fluids*, 34(8):927–49–, 2005.

- [6] B. R. Noack, P. Papas, and P. A. Monkewitz. The need for a pressure-term representation in empirical Galerkin models of incompressible shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 523:339–65, 2005.
- [7] E. Caraballo, C. Kasnakoglu, A. Serrani, and M. Samimy. Control input separation methods for reduced-order model-based feedback flow control. *AIAA Journal*, 46(9):2306–2322, 2008.
- [8] G. K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge university press, 2000.
- [9] P. Holmes, J.L. Lumley, and G. Berkooz. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical System, and Symmetry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [10] M. O. Efe and H. Ozbay. Low dimensional modelling and Dirichlet boundary controller design for Burgers equation. *International Journal of Control*, 77(10):895–906, July 2004.
- [11] C. Kasnakoglu, A. Serrani, and M. O. Efe. Control input separation by actuation mode expansion for flow control problems. *International Journal of Control*, 81(9):1475–1492, 2008.
- [12] C. Kasnakoglu, R.C. Camphouse, and A. Serrani. Reduced-order model-based feedback control of flow over an obstacle using center manifold methods. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 131(1):011011, 2009.
- [13] M. Samimy, M. Debiasi, E. Caraballo, A. Serrani, X. Yuan, J. Little, and J. H. Myatt. Feedback control of subsonic cavity flows using reduced-order models. *Journal of Fluid Mechanics*, 579:315–346, 2007.
- [14] C. Kasnakoglu and A. Serrani. Attenuation of oscillations in galerkin systems using center manifold techniques. *European Journal of Control*, 13(5):529–542, 2007.
- [15] D. Rempfer. On low-dimensional Galerkin models for fluid flow. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 14(2):75–88, 2000.
- [16] L. Ljung. *System Identification: Theory for the user*. PTR Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.
- [17] S. L. Lacy and D. S. Bernstein. Subspace identification with guaranteed stability using constrained optimization. *IEEE Transactions on automatic control*, 48(7):1259–1263, 2003.
- [18] R.A. Hyde. *H-infinity aerospace control design- A VSTOL flight application*. Springer-Verlag, London, UK, 1995.
- [19] M. Raffel, C. E. Willert, and J. Kompenhans. *Particle Image Velocimetry: A Practical Guide*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.
- [20] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures. *Quarterly of Applied Math.*, XLV(3):561–590, 1987.
- [21] P. Van Overschee and B. De Moor. *Subspace Identification for Linear Systems: Theory, implementation, applications*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [22] W.E. Larimore. Statistical optimality and canonical variate analysis system identification. *Signal Processing*, 52(2):131–144, 1996.
- [23] D. Engwirda. An unstructured mesh navier-stokes solver. Master's thesis, School of Engineering, University of Sydney, 2005. Also available at MATLAB Central.
- [24] D.E. Rivera, M. Morarl, and S. Skogestad. Internal Model Control. 4. PID Controller Design. *Industrial Engineering Chemistry Process Design and Development*, 25(1):252–265, 1986.